3. Charakterystyki zadań z obu arkuszy

W tym rozdziale przedstawiono próbę interpretacji wyników poszczególnych zadań z obu arkuszy egzaminacyjnych z matematyki, które w sesji wiosennej 2005 r. rozwiązywali maturzyści w okręgu obejmującym województwa dolnośląskie i opolskie. Komentarze oraz przykłady błędów uczniowskich są poprzedzone obszerną tabelą zawierającą schemat punktowania danego zadania oraz najważniejsze dane statystyczne wyników jego rozwiązywania (metryczką zadania).

Arkusz I – dla poziomu podstawowego, część pierwsza egzaminu na poziomie rozszerzonym

Zadanie 1.

L.p.	Opis wykonywanej czynności	Liczba punktów za czynność	Łatwość czynności	Badany standard
1.1	Obliczenie prawdopodobieństwa wylosowania białej kuli spośród 4 kul białych i 5 czarnych: $p_1 = \frac{4}{9}$	1 pkt	0,71	II.2a)
1.2	Obliczenie prawdopodobieństwa wylosowania białej kuli spośród 3 kul białych i 4 czarnych: $p_2 = \frac{3}{7}$	1 pkt	0,68	II.2a
1.3	Porównanie obliczonych wyników i sformułowanie odpowiedzi: $p_1 > p_2$	1 pkt	0,77	I
Podstawowe wskaźniki statystyczne zadania w populacji zdających (N = 8374)				
Średnia zdobytych punktów		**2,17**		
Łatwość zadania		**0,72**		
Współczynnik korelacji zadania z całym arkuszem		**0,56**		
Rozkład uzyskiwanych punktów				
0 punktów		**1474 (17,6%)**		
1 punkt		**906 (10,8%)**		
2 punkty		**747 (8,9%)**		
3 punkty		**5247 (62,6%)**		

Komentarz:

Zadanie 1. sprawdzało umiejętności obliczania prawdopodobieństwa zdarzenia losowego oraz porównywania liczb wymiernych. Pierwsze zadanie w arkuszu okazało się łatwe (wskaźnik łatwości 0,71). Ponad 62,6% zdających rozwiązało je całkowicie poprawnie. Zastosowanie klasycznej definicji prawdopodobieństwa w sytuacji losowania jednej kuli z urny sprawiło kłopot prawie co piątemu (17,6%) zdającemu. Przeszkodą dla większości z nich było prawidłowe zinterpretowanie treści zadania. Świadczyć mogą o tym błędy. Zapisy zdających, którzy uznawali, że prawdopodobieństwem jest liczba $\binom{9}{4}$ oraz liczba $\binom{7}{3}$ wcale nie były odosobnione. Część zdających w końcowej fazie rozwiązania popełniła błąd w porównywaniu dwóch liczb wymiernych. Porównywali ułamki zwykłe $\frac{4}{9}$ i $\frac{3}{7}$ bez zamiany ich na postać dziesiętną z użyciem kalkulatora i gubili punkt za ostatnią czynność w tym zadaniu.

Zadanie 2.

L.p.	Opis wykonywanej czynności	Liczba punktów za czynność	Łatwość czynności	Badany standard
2.1	Zapisanie nierówności: $\frac{n+2}{3n+1} > \frac{1}{2}$	1 pkt	0,86	II.2a)
2.2	Przekształcenie nierówności do postaci liniowej lub iloczynowej: $n < 3$ lub $2(3-n)(3n+1) > 0$	1 pkt	0,48	II.2a)
2.3	Rozwiązanie nierówności w zbiorze liczb naturalnych: $n = 1$ lub $n = 2$	1 pkt	0,45	I
2.4	Sformułowanie odpowiedzi: $a_1 = \frac{3}{4}$, $a_2 = \frac{4}{7}$	1 pkt	0,58	I

Podstawowe wskaźniki statystyczne zadania w populacji zdających (N = 8374)	
Średnia zdobytych punktów	2,38
Łatwość zadania	0,59
Współczynnik korelacji zadania z całym arkuszem	0,69

Rozkład uzyskiwanych punktów	
0 punktów	1010 (12,1%)
1 punkt	1211 (14,5%)
2 punkty	2350 (28,1%)
3 punkty	1223 (14,6%)
4 punkty	2580 (30,8%)

Komentarz:
Zadanie 2. sprawdzało umiejętności rozwiązywania nierówności związanej z funkcją homograficzną oraz wyznaczenia wyrazów ciągu liczbowego określonego wzorem ogólnym.

Mimo jasnego kontekstu zadanie to było umiarkowanie trudne dla tej grupy zdających (łatwość 0,59). Tylko co trzeci zdający poradził sobie w całości z poleceniem znalezienia wszystkich wyrazów ciągu, spełniających podaną nierówność. Co ósmy nie zdobył żadnego punktu. Uwagę należy zwrócić także na dość liczną grupę zdających (28,1%), którzy za rozwiązanie tego zadania otrzymali 2 punkty. Wśród nich byli tacy, którzy nie rozwiązali odpowiedniej nierówności, lecz obliczali kilka początkowych wyrazów ciągu z podanego wzoru i na tej podstawie formułowali odpowiedź końcową. Czyżby polecenie „wyznacz wszystkie wyrazy ciągu...” było dla nich na tyle skomplikowane, że nawet nie potrafili w tekście swojego rozwiązania użyć stwierdzenia: „ponieważ ciąg jest malejący, więc...”? Pewnie tak, bo zauważenie, że zastosowanie takiej metody rozwiązywania tego zadania zmusza ponadto (jeśli chce się otrzymać wszystkie 4 punkty) do wykazania monotoniczności ciągu to już dojrzałość matematyczna.

Zadanie 3.

L.p.	Opis wykonywanej czynności	Liczba punktów za czynność	Łatwość czynności	Badany standard
3.1	Wykorzystanie podzielności wielomianu przez dwumian $x+2$ np. $W(-2)=0$ lub podzielenie wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x+2$	1 pkt	0,69	II.2a)
3.2	Wyznaczenie k: $k=3$	1 pkt	0,66	II.2a)
3.3	Rozłożenie wielomianu na czynniki: $W(x)=(x-1)(x+2)^2$	1 pkt	0,53	II.2a)
3.4	Podanie pierwiastków wielomianu: $x_1 = x_2 = -2,\ x_3 = 1$	1 pkt	0,55	II.2a)

Podstawowe wskaźniki statystyczne zadania w populacji zdających (N = 8374)	
Średnia zdobytych punktów	2,43
Łatwość zadania	0,61
Współczynnik korelacji zadania z całym arkuszem	0,68

Rozkład uzyskiwanych punktów	
0 punktów	2223 (26,5%)
1 punkt	618 (7,3%)
2 punkty	807 (9,6%)
3 punkty	779 (9,3%)
4 punkty	3947 (47,1%)

Komentarz:
Zadanie 3. sprawdzało umiejętności: zastosowania twierdzenia Bezout, rozkładania wielomianu stopnia trzeciego na czynniki i wyznaczania pierwiastków wielomianu. Dla tej grupy zdających zadanie to było umiarkowanie trudne (łatwość 0,61). Niemal połowa maturzystów (47,1%) rozwiązała je całkowicie poprawnie. 26,5% zdających nie było w stanie uzyskać choćby jednego punktu. Przeszkodą dla tych zdających mogła być konstrukcja zadania, to znaczy istnienie w nim dwóch zależnych od siebie podpunktów. Zdający, który w podpunkcie a) nie mógł przebrnąć przez podzielność wielomianu przez dwumian, nie rozwiązywał też podpunktu b). Kłopoty pojawiały się wtedy, gdy zamiast rozważać warunek $W(-2)=0$, zdający próbowali dzielić dwa wielomiany (dzielna zawierała współczynnik k).

Ponadto część zdających nie wykorzystała wspomnianej już zależności podpunktów a) i b), i mając poprawny wynik dzielenia rozwiązywała od początku podpunkt b), zamiast zapisać żądaną postać iloczynową wprost z wyniku dzielenia.

Zadanie 4.

L.p.	Opis wykonywanej czynności	Liczba punktów za czynność	Łatwość czynności	Badany standard
4.1	Wprowadzenie oznaczeń wskazujących, że liczby tworzą ciąg geometryczny, np. x – liczba płyt ustawionych na górnej półce, gdzie $x\langle 24\ i\ x \in N_+$ 24 – liczba płyt ustawionych na środkowej półce, $24 \cdot \frac{24}{x}$ – liczba płyt ustawionych na dolnej półce	1 pkt	0,83	III.1a)
4.2	Wykorzystanie sumy trzech wyrazów ciągu geometrycznego i ułożenie równania z niewiadomą x: $x+24+\frac{576}{x}=76$ (*)	1 pkt	0,69	III.1a)
4.3	Przekształcenie równania (*) do postaci (**): $x^2-52x+576=0$ (**)	1 pkt	0,51	III.1a)
4.4	Rozwiązanie równania (**): $x_1=16, x_2=36$	1 pkt	0,44	III.1a)
4.5	Zapisanie odpowiedzi zgodnie z warunkami zadania. Na górnej półce jest 16 płyt, zaś na dolnej półce jest ich 36.	1 pkt	0,45	III.1a)

Podstawowe wskaźniki statystyczne zadania w populacji zdających (N = 8374)	
Średnia zdobytych punktów	**2,92**
Łatwość zadania	**0,58**
Współczynnik korelacji zadania z całym arkuszem	**0,76**
Rozkład uzyskiwanych punktów	
0 punktów	**1325 (15,8%)**
1 punkt	**1259 (15%)**
2 punkty	**1236 (14,8%)**
3 punkty	**872 (10,4%)**
4 punkty	**275 (3,3%)**
5 punktów	**3407 (40,7%)**

Komentarz:
Zadanie 4. sprawdzało umiejętności podania opisu matematycznego sytuacji opisanej w zadaniu tekstowym z wykorzystaniem własności ciągu geometrycznego. Kolejne w tym zestawie zadanie umiarkowanie trudne (łatwość 0,58), mimo czytelnego i „oswojonego” kontekstu (własności ciągu geometrycznego) – zróżnicowało zdających. Prawie 16% zdających nie zdołało uzyskać choćby jednego punktu za wprowadzenie do rozwiązania oznaczeń, świadczących o tym, że zadanie dotyczy ciągu geometrycznego. Uwagę zwraca także niemal piętnastoprocentowa grupa zdających, którzy zdobyli 2 punkty z 5 możliwych. W dużej części byli to zdający, którzy wprowadzili odpowiednie oznaczenia i ułożyli równanie wynikające z informacji o sumie trzech wyrazów danego ciągu, jednak nie potrafili tego równania poprawnie rozwiązać. Wspomnieć należy również o nielicznych zdających (3,3%), którzy mieli kłopoty z zinterpretowaniem wyników swoich obliczeń i sformułowaniem prawidłowej odpowiedzi, uwzględniającej monotoniczność danego ciągu. Tylko nieco ponad 40% zdających w pełni poprawnie rozwiązało to zadanie.

Zadanie 5.

L.p.	Opis wykonywanej czynności	Liczba punktów za czynność	Łatwość czynności	Badany standard
5.1	Wprowadzenie oznaczeń, np.: x – liczba kolejnych obniżek ceny jednej kurtki, $(60-x)$ – zysk ze sprzedaży jednej kurtki, $(40+x)$ – liczba sprzedanych kurtek	1 pkt	0,52	III.1a)
5.2	Określenie funkcji f opisującej miesięczny zysk: $f(x)=(60-x)(40+x)$ lub $f(x)=-x^2+20x+2400$	1 pkt	0,21	III.1a)
5.3	Wyznaczenie wartości argumentu x_w, dla której funkcja przyjmuje największą wartość: $x_w=10$	1 pkt	0,31	II.2a)
5.4	Wyznaczenie szukanej ceny: 150 zł	1 pkt	0,33	II.2a)

Podstawowe wskaźniki statystyczne zadania w populacji zdających (N = 8374)	
Średnia zdobytych punktów	**1,37**
Łatwość zadania	**0,34**
Współczynnik korelacji zadania z całym arkuszem	**0,55**

Rozkład uzyskiwanych punktów	
0 punktów	**3787 (45,2%)**
1 punkt	**1455 (17,4%)**
2 punkty	**657 (7,8%)**
3 punkty	**1172 (14%)**
4 punkty	**1303 (15,6%)**

Komentarz:
Zadanie 5. sprawdzało umiejętność zbudowania modelu matematycznego do opisanego w zadaniu zagadnienia optymalizacyjnego. Dla tej grupy zdających było jednym z trzech trudnych zadań (łatwość 0,34). Prawie połowa (45,2%) zdających nie zdobyła żadnego punktu. Niestety nie dowiemy się już, ilu z nich rzeczywiście nie potrafi wyznaczyć największej wartości funkcji kwadratowej – w zestawie tej umiejętności nie bada już żadne inne zadanie. Tym razem możemy wskazać na kontekst zadania jako istotną przyczynę niskich wyników. Realistyczny kontekst zadania (umiejętność odróżnienia „przychodu” od „zysku”) to tylko jedna z przeszkód na drodze budowania funkcji, której własności należało następnie zbadać. W innym wypadku pozostawała droga liczenia zysku miesięcznego „na piechotę” – jednak i tutaj w odpowiednim momencie należało powołać się na monotoniczność funkcji. Taką metodę obrała większość spośród tych, którzy uzyskali 1 punkt za taki sposób rozwiązania (17,4%). Tylko 15,6% zdających uzyskało wszystkie punkty za rozwiązanie tego zadania.

Zadanie 6.

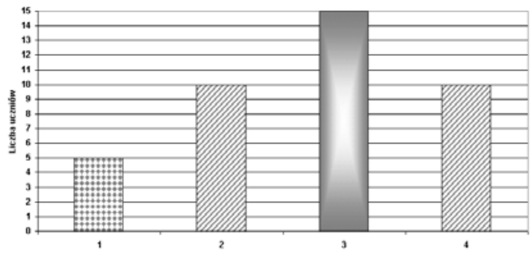
L.p.	Opis wykonywanej czynności	Liczba punktów za czynność	Łatwość czynności	Badany standard
6.1	Rozwiązanie nierówności: $\lvert x+2\rvert \langle 3$ i wyznaczenie zbioru A (w tym 1 p. za metodę oraz 1 p. za obliczenia): $A=(-5;1)$	2 pkt	0,60	II.2a)
6.2	Rozwiązanie nierówności: $(2x-1)^3 \le 8x^3-13x^2+6x+3$ i wyznaczenie zbioru B: $B=\langle -2;2\rangle$ (w tym 1 p. za doprowadzenie nierówności do postaci $x^2 \le 4$ oraz 1 p. za rozwiązanie otrzymanej nierówności kwadratowej	2 pkt	0,49	II.2a)
6.3	Wyznaczenie zbioru $A \cap B$: $A \cap B = \langle -2;1)$	1 pkt	0,57	II.2a)
6.4	Wyznaczenie zbioru $B-A$: $B-A=\langle 1;2\rangle$	1 pkt	0,44	II.2a)

Podstawowe wskaźniki statystyczne zadania w populacji zdających (N=8374)	
Średnia zdobytych punktów	**3,19**
Łatwość zadania	**0,53**
Współczynnik korelacji zadania z całym arkuszem	**0,77**
Rozkład uzyskiwanych punktów	

0 punktów	**1648 (19,7%)**
1 punkt	**702 (8,4%)**
2 punkty	**929 (11,1%)**
3 punkty	**874 (10,4%)**
4 punkty	**1135 (13,5%)**
5 punktów	**1551 (18,5%)**
6 punktów	**1535 (18,3%)**

Komentarz:
Zadanie 6. sprawdzało umiejętności: interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej, wykonywania działań na wyrażeniach algebraicznych z uwzględnieniem wzorów skróconego mnożenia, rozwiązywania nierówności kwadratowej z jedną niewiadomą, wykonywania działań mnogościowych na przedziałach liczbowych. Zadanie okazało się umiarkowanie trudne (łatwość 0,53), choć jego kontekst tym razem był jasny, a czynności zdającego były typowe. Niemal co piąty zdający (19,7%) nie potrafił poprawnie wykonać żadnej czynności w swoim rozwiązaniu. Oznacza to, że, pomijając tych zdających, którzy nie podjęli próby rozwiązania zadania 6., pozostali mieli kłopoty z interpretacją geometryczną wartości bezwzględnej, z zastosowaniem wzoru na sześcian różnicy, czy też z poprawnym doprowadzeniem danej nierówności do nierówności kwadratowej i jej rozwiązaniem (mimo że własności wartości bezwzględnej są na stronie 1, a wzory skróconego mnożenia są na stronie 2. *Zestawu wybranych wzorów matematycznych* przygotowanego na egzamin dla każdego zdającego). Grupa tych zdających, którzy zdobyli wszystkie punkty za rozwiązanie tego zadania nie jest zbyt liczna (18,3%). Pozostali zdający najczęściej popełniali błędy w wyznaczaniu różnicy zbiorów $B-A$, czy też przy samym wyznaczaniu zbiorów A oraz B (otrzymywali jeden punkt tylko pod warunkiem, że zastosowali poprawną metodę).

Zadanie 7.

L.p.	Opis wykonywanej czynności	Liczba punktów za czynność	Łatwość czynności	Badany standard
7.1	Naszkicowanie diagramu:  Czas w godzinach	1 pkt	0,95	II.2b)
7.2	Obliczenie średniej liczby godzin: 2,75	1 pkt	0,75	II.2a)
7.3	Obliczenie wariancji (w tym 1 p. za metodę oraz 1 p. za obliczenia): 0,94	2 pkt	0,22	II.2a)
7.4	Obliczenie odchylenia standardowego: 0,97	1 pkt	0,73	II.2a)

Podstawowe wskaźniki statystyczne zadania w populacji zdających (N = 8374)	
Średnia zdobytych punktów	**2,86**
Łatwość zadania	**0,57**
Współczynnik korelacji zadania z całym arkuszem	**0,60**

Rozkład uzyskiwanych punktów	
0 punktów	**108 (1,3%)**
1 punkt	**940 (11,2%)**
2 punkty	**2336 (27,9%)**
3 punkty	**3009 (35,9%)**
4 punkty	**554 (6,6%)**
5 punktów	**1427 (17%)**

Komentarz:
Zadanie 7. sprawdzało umiejętności przedstawienia danych empirycznych za pomocą diagramu słupkowego oraz obliczania średniej ważonej zbioru danych, wariancji i odchylenia standardowego danej próby. Zadanie okazało się dla tej grupy zdających umiarkowanie trudne (łatwość 0,57), mimo że tylko 1,3% nie otrzymało za jego rozwiązanie żadnego punktu. Największą grupę stanowią ci zdający, którzy

uzyskali 3 punkty (35,9%). Punkty te otrzymali za sporządzenie diagramu słupkowego, obliczenie średniej oraz obliczenie odchylenia standardowego. Najwięcej kłopotów sprawiło zdającym obliczenie wariancji. Wzór znajdujący się w *Zestawie wybranych wzorów matematycznych* był bezkrytycznie przepisywany, a to najczęściej oznaczało nieuwzględnienie częstości pojawiania się danych i w konsekwencji złą metodę obliczania wariancji. Zdający nie odróżnili sytuacji, w której podajemy w tabeli n danych od sytuacji, w której dane są pogrupowane w 4 grupy (jak w omawianym zadaniu) tak, że częstości $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$. Ponadto część zdających tak dalece zasugerowała się podanym w zestawie wzorów zapisem $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$, że w rozwiązaniach wzór ten stosowali dosłownie, np: „odchylenie standardowe $\sigma = \sqrt{0{,}94^2} = 0{,}94$, tracąc w ten sposób możliwość uzyskania stosunkowo „łatwego" punktu.

Zadanie 8.

L.p.	Opis wykonywanej czynności	Liczba punktów za czynność	Łatwość czynności	Badany standard
8.1	Wykorzystanie warunku dla czworokąta opisanego na okręgu (w tym 1 p. za metodę oraz 1 p. za obliczenia): $\lvert AB\rvert + \lvert DC\rvert = 16{,}3\ dm$	2 pkt	0,69	II.2a)
8.2	Obliczenie pola S_{ABCD} czworokąta: $S_{ABCD} = 48{,}9\ dm^2$	1 pkt	0,17	II.2c)
8.3	Obliczenie pola S_k koła: $S_k = 9\pi \approx 28{,}27\,dm^2$ lub $S_k \approx 28{,}26\,dm^2$	1 pkt	0,82	II.2c)
8.4	Obliczenie pola S_r niewykorzystanej części materiału: $S_r \approx 20{,}63\,dm^2$ lub $S_r \approx 20{,}64\,dm^2$	1 pkt	0,24	II.2c)
8.5	Obliczenie, ile procent S_{ABCD} stanowi S_r z dokładnością do 0,01: $\frac{S_r}{S_{ABCD}} \cdot 100\% \approx 42{,}19\%$ lub $\frac{S_r}{S_{ABCD}} \cdot 100\% \approx 42{,}21\%$	1 pkt	0,24	II.2c)

Podstawowe wskaźniki statystyczne zadania w populacji zdających (N = 8374)	
Średnia zdobytych punktów	2,84
Łatwość zadania	0,47
Współczynnik korelacji zadania z całym arkuszem	0,47
Rozkład uzyskiwanych punktów	
0 punktów	882 (10,5%)
1 punkt	1219 (14 ,5%)
2 punkty	908 (10,8%)
3 punkty	3296 (39,3%)
4 punkty	467 (5,6%)
5 punktów	623 (7,4%)
6 punktów	979 (11,7%)

Komentarz:

Zadanie 8. sprawdzało umiejętności korzystania z własności czworokąta opisanego na okręgu, obliczania pól podstawowych figur płaskich, wykonywania obliczeń procentowych oraz szacowania wyników obliczeń z zadaną dokładnością. To kolejne zadanie w zestawie, które okazało się trudne dla tej grupy zdających (łatwość 0,47). Co dziesiąty zdający (10,5%) nie uzyskał żadnego punktu za jego rozwiązanie. Jednocześnie, na przeciwległym biegunie jest nieco więcej zdających (11,7%), którzy całkowicie poprawnie to zadanie rozwiązali. Spośród pozostałych największą grupę stanowią ci zdający, którzy dobyli 3 punkty (39,3%). W tej grupie z kolei najliczniejsi są zdający, którzy wykorzystali warunek dla czworokąta opisanego na okręgu (2 punkty) oraz obliczyli pole serwetki (1 punkt). Obie czynności były dla zdających najłatwiejsze (łatwości są równe kolejno 0,69 i 0,82). W zadaniu istniała jednak bariera w postaci konieczności wykazania się umiejętnościami wykonania obliczeń procentowych (łatwość tych czynności jest równa 0,24). Zauważyć trzeba, że najtrudniejszą czynnością w tym zadaniu dla zdających było obliczenie pola czworokąta – łatwość tej czynności równa się tylko 0,17.

Zadanie 9.

L.p.	Opis wykonywanej czynności	Liczba punktów za czynność	Łatwość czynności	Badany standard
9.1	Wprowadzenie oznaczeń dla obu części spadku i zapisanie zależność między nimi: np.: x – kwota wpłacona dla ośmioletniego dziecka, y – kwota wpłacona dla dziesięcioletniego dziecka, $x+y=84100$	1 pkt	0,38	III.1a)
9.2	Za stosowanie w obliczeniach procentu składanego	1 pkt	0,65	I
9.3	Ułożenie układu równań: $\begin{cases} x+y=84100 \\ x\left(1+\frac{1}{20}\right)^{13}=y\left(1+\frac{1}{20}\right)^{11} \end{cases}$	1 pkt	0,29	III.1a)
9.4	Przekształcenie układu równań do postaci: $\begin{cases} x+y=84100 \\ x\left(1+\frac{1}{20}\right)^{2}=y \end{cases}$	1 pkt	0,25	I
9.5	Rozwiązanie układu równań i sformułowanie odpowiedzi (w tym 1 p. za metodę oraz 1 p. za poprawne obliczenia): x = 40000 zł, y = 44100 zł	2 pkt	0,24	II.2a)

Podstawowe wskaźniki statystyczne zadania w populacji zdających (N = 8374)	
Średnia zdobytych punktów	**2,04**
Łatwość zadania	**0,34**
Współczynnik korelacji zadania z całym arkuszem	**0,72**

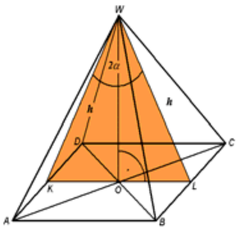
Rozkład uzyskiwanych punktów	
0 punktów	**2520 (30,1%)**
1 punkt	**2837 (33,9%)**
2 punkty	**541 (6,5%)**
3 punkty	**299 (3,6%)**
4 punkty	**206 (2,5%)**
5 punktów	**382 (4,6%)**
6 punktów	**1589 (19%)**

Komentarz:
Zadanie 9. sprawdzało umiejętności podania opisu matematycznego sytuacji problemowej opisanej w zadaniu tekstowym, stosowania procentu składanego, wykonywania działań na potęgach o wykładnikach całkowitych oraz rozwiązywania algebraicznego układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi. Trzecie trudne zadanie w zestawie (łatwość 0,34). Trudne z powodu konieczności przeprowadzenia poprawnej analizy sytuacji opisanej w treści zadania, trudne z powodu kontekstu realistycznego, w którym na dodatek należało zastosować procent składany. Niemal co trzeci zdający (30,1%) nie zdobył ani jednego punktu za jego rozwiązanie. 1 punkt zdobyło 33,9% zdających – byli to najczęściej ci, którzy w swoich (często błędnych) obliczeniach zastosowali procent składany i którym według schematu oceniania za czynność 9.2 egzaminatorzy przyznawali punkt. Łącznie zatem 64% zdających albo nie podjęło próby rozwiązania tego zadania, albo źle zinterpretowało jego treść, albo jedynie rozpoznało konieczność wykonania obliczeń z wykorzystaniem procentu składanego. Błędem często powtarzającym się było obliczanie kwoty, jaką otrzyma każde z dzieci (za 11. lub 13. lat), przy założeniu, że każde z nich w tej chwili dysponuje kwotą 84100 zł. Tylko co piąty maturzysta poprawnie zinterpretował treść zadania, a swoje obliczenia poprawnie doprowadził do końca.

Komentarz do zadania 10:
Zadanie 10. sprawdzało umiejętności określenia kąta między wysokościami przeciwległych ścian bocznych w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym oraz wyznaczenia objętości ostrosłupa z zastosowaniem trygonometrii. Ostatnie zadanie w arkuszu okazało się dla tej grupy zdających umiarkowanie trudne (łatwość 0,56). Co dziesiąty zdający nie otrzymał za to zadanie ani jednego punktu. Wśród nich są tacy zdający, którzy: nie podjęli próby rozwiązania, bądź ilustrowali treść zadania ostrosłupem prawidłowym trójkątnym lub prostopadłościanem. Są wreszcie i tacy, którzy naszkicowali właściwy ostrosłup, ale nie wprowadzili żadnych oznaczeń. Schemat oceniania był przygotowany tak, że zdający mógł uzyskać 3 punkty bez wykonywania jakichkolwiek rachunków, a jedynie (?) za poprawne zinterpretowanie treści zadania, naszkicowanie właściwego ostrosłupa, wprowadzenie poprawnych oznaczeń i zaznaczenie wysokości ostrosłupa na właściwym jego przekroju. Jednak frakcja tych zdających, którzy uzyskali 3 punkty,

nie jest zbyt liczna (18,8%). Do częstych błędów na rysunku prowadziła bowiem zła interpretacja określenia „*wysokości przeciwległych ścian bocznych poprowadzonych z wierzchołka ostrosłupa...*”. Tylko co czwarty zdający (25,8%) potrafił w pełni zaprezentować wszystkie potrzebne umiejętności. Pozostali gubili punkty, stosując złe definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym (wzory były dostępne w *Zestawie wybranych wzorów matematycznych*), bądź też wykonując niepoprawnie obliczenia pola podstawy ostrosłupa czy też jego objętości. Należy wspomnieć także o niewielkiej grupie zdających, którzy wprowadzili do treści zadania własne i konkretne miary wspomnianego kąta między wysokościami przeciwległych ścian bocznych, oraz o tych, którzy nie przyjmowali do wiadomości danych w treści i rozwiązywali zadanie z własnymi danymi, na przykład w końcowych obliczeniach objętość ostrosłupa była uzależniana od wysokości ostrosłupa i długości krawędzi bocznej.

Zadanie 10.

L.p.	Opis wykonywanej czynności	Liczba punktów za czynność	Łatwość czynności	Badany standard
10.1	Sporządzenie rysunku wraz z oznaczeniami lub wprowadzenie dokładnie opisanych oznaczeń,  np. $\lvert WK\rvert = \lvert WL\rvert = h$ V – objętość ostrosłupa $ABCDW$, P_p - pole podstawy ostrosłupa $ABCDW$	1 pkt	0,87	I
10.2	Zaznaczenie na rysunku właściwego przekroju i właściwego kąta	1 pkt	0,75	I
10.3	Wykorzystanie własności, że trójkąt WKL jest równoramienny i wysokość WO jest wysokością ostrosłupa	1 pkt	0,71	II.2a)
10.4	Obliczenie $\lvert WO\rvert$ z ΔWOL: $\lvert WO\rvert = h\cos\alpha$	1 pkt	0,42	II.2a)
10.5	Obliczenie $\lvert AB\rvert$: $\lvert AB\rvert = 2h\sin\alpha$	1 pkt	0,40	II.2a)
10.6	Obliczenie pola podstawy ostrosłupa: $P_p = 4h^2\sin^2\alpha$ Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = \frac{4}{3}h^3\sin^2\alpha\cos\alpha$ lub $V = \frac{2}{3}h^3\sin 2\alpha\sin\alpha$	2 pkt	0,40	II.2a)

Podstawowe wskaźniki statystyczne zadania w populacji zdających (N = 8374)	
Średnia zdobytych punktów	**3,95**
Łatwość zadania	**0,56**
Współczynnik korelacji zadania z całym arkuszem	**0,77**

Rozkład uzyskiwanych punktów	
0 punktów	**829 (9,9%)**
1 punkt	**802 (9,6%)**
2 punkty	**959 (11,4%)**
3 punkty	**1577 (18,8%)**
4 punkty	**593 (7,1%)**
5 punktów	**579 (6,9%)**
6 punktów	**870 (10,4%)**
7 punktów	**2165 (25,8%)**

Arkusz II – część druga egzaminu na poziomie rozszerzonym

Komentarz do zadania 11:

Zadanie 11. sprawdzało umiejętności wyznaczenia dziedziny funkcji logarytmicznej oraz rozwiązywania nierówności wielomianowych. Funkcja logarytmiczna może zbytnio rozbudowana, ale czynności, które powinien był wykonać zdający (nieskomplikowane nierówności stopnia drugiego i trzeciego), są typowe.

Mimo to zadanie okazało się umiarkowanie trudne (łatwość 0,50). Dość duża grupa zdających (30,8%) nie potrafiła zdobyć ani jednego punktu za jego rozwiązanie. Jeszcze mniej, bo 27,9%, zdających rozwiązało to zadanie właściwie. Błędy zdających polegały najczęściej na zapominaniu, że podstawa logarytmu oprócz tego, że musi być dodatnia to powinna być także różna od liczby jeden (łatwość tej czynności jest najniższa 0,43). Niektórym zdającym zabrakło umiejętności poprawnego rozwiązania nierówności stopnia trzeciego wynikających z odpowiedniego założenia dla liczby logarytmowanej – pojawiały się błędne rozkłady lewej strony na czynniki, czy też błędne wnioski dotyczące miejsc zerowych wielomianu.

Zadanie 11.

L.p.	Opis wykonywanej czynności	Liczba punktów za czynność	Łatwość czynności	Badany standard
11.1	Wyznaczenie zbioru argumentów, dla których liczba logarytmowana jest dodatnia: $x \in (-4;-1) \cup (1;+\infty)$	1 pkt	0,57	I
11.2	Wyznaczenie zbioru argumentów, dla których podstawa logarytmu jest dodatnia i różna od 1: $x \in (-\infty;-2) \cup (-2;-\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3};2) \cup (2;+\infty)$	1 pkt	0,43	I
11.3	Wyznaczenie dziedziny funkcji: $x \in (-4;-2) \cup (-2;-\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3};2) \cup (2;+\infty)$	1 pkt	0,48	I

Podstawowe wskaźniki statystyczne zadania w populacji zdających (N = 5772)	
Średnia zdobytych punktów	1,49
Łatwość zadania	0,50
Współczynnik korelacji zadania z całym arkuszem	0,72

Rozkład uzyskiwanych punktów	
0 punktów	1776 (30,8%)
1 punkt	983 (17%)
2 punkty	1398 (24,2%)
3 punkty	1615 (27,9%)

Zadanie 12.

L.p.	Opis wykonywanej czynności	Liczba punktów za czynność	Łatwość czynności	Badany standard
12.1	Za przedstawienie metody szkicowania wykresu, np. poprzez obliczanie współrzędnych punktów należących do wykresu lub przekształcenie wzoru funkcji, np. do postaci: $f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$	1 pkt	0,17	III.1c)
12.2	Naszkicowanie wykresu funkcji 	1 pkt	0,07	III.1c)
12.3	Rozwiązanie równania (po 1 pkt za metodę i rozwiązanie): $x = 2k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, gdzie $k \in C$	2 pkt	0,14	III.1b)

Podstawowe wskaźniki statystyczne zadania w populacji zdających (N = 5772)	
Średnia zdobytych punktów	0,53
Łatwość zadania	0,13
Współczynnik korelacji zadania z całym arkuszem	0,56

Rozkład uzyskiwanych punktów	
0 punktów	3998 (69,3%)
1 punkt	1055 (18,3%)
2 punkty	368 (6,4%)
3 punkty	164 (2,8%)
4 punkty	187 (3,2%)

Komentarz:
Zadanie 12. sprawdzało umiejętności sporządzania wykresu funkcji trygonometrycznej oraz rozwiązywania równania trygonometrycznego. Jedno z dwóch bardzo trudnych zadań (drugie to zadanie 17.) dla tej grupy zdających (łatwość 0,13). Niemal 70% maturzystów nie zdobyło za nie żadnego punktu. Zdający mieli bardzo duże kłopoty z naszkicowaniem wykresu funkcji $f(x)$ – łatwość tej czynności to jedynie 0,07. Egzaminatorzy punktowali w czynności 12.1 (por. schemat oceniania) już ślad metody prowadzący do naszkicowania wykresu – łatwość tej czynności to tylko 0,17. Zdający usiłowali naszkicować wykres, zaznaczając punkty charakterystyczne wykresu, bądź też szkicowali w jednym układzie współrzędnych cosinusoidę oraz odpowiednio zmodyfikowaną sinusoidę, by w końcu graficznie odejmować wykresy obu funkcji. Podobnie było z rozwiązaniem równania $f(x)=1$. Czynność ta była bardzo trudna dla zdających (łatwość 0,14). Jeśli nawet zdający wpadał na pomysł na przykład podniesienia obu stron równania do potęgi drugiej, otrzymując 1 punkt za metodę, to nie potrafił dać sobie rady z wszystkimi późniejszymi obliczeniami i odróżnieniem właściwych od obcych pierwiastków równania.

Zadanie 13.

L.p.	Opis wykonywanej czynności	Liczba punktów za czynność	Łatwość czynności	Badany standard
13.1	Obliczenie prawdopodobieństwa otrzymania w jednym rzucie tej samej liczby oczek na obu kostkach: $p=\frac{1}{6}$	1 pkt	0,38	II.2)R
13.2	Wykorzystanie schematu Bernoullego i określenie: p, q, N, k: $p=\frac{1}{6},\quad q=\frac{5}{6},\quad N=n,\quad k\geq 1$	1 pkt	0,25	II.2)R
13.3	Obliczenie prawdopodobieństwa otrzymania w n rzutach co najmniej raz tej samej liczby oczek na obu kostkach: $P_n(k\geq 1)=1-P_n(0)=1-\binom{n}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^n=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$	1 pkt	0,15	II.2)R
13.4	Rozwiązanie nierówności wykładniczej i sformułowanie odpowiedzi: $n\in\{1,2,3\}$	1 pkt	0,10	II.2)R

Podstawowe wskaźniki statystyczne zadania w populacji zdających (N = 5772)	
Średnia zdobytych punktów	**0,89**
Łatwość zadania	**0,22**
Współczynnik korelacji zadania z całym arkuszem	**0,62**
Rozkład uzyskiwanych punktów	
0 punktów	**3359 (58,2%)**
1 punkt	**1002 (17,4%)**
2 punkty	**600 (10,4%)**
3 punkty	**311 (5,4%)**
4 punkty	**500 (8,7%)**

Komentarz:
Zadanie 13. sprawdzało umiejętności stosowania schematu Bernoullego do obliczania prawdopodobieństwa oraz rozwiązania nierówności wykładniczej. Łatwość zadania 13. jest równa 0,22, co sytuuje to zadanie wśród trudnych. Przeważająca większość z nich (75,9%) albo w ogóle nie podejmowała próby jego rozwiązania bądź miała trudności z interpretacją rodzaju narzędzia do rozwiązania tego zadania (17,4%) i kończyła na pierwszej czynności w zadaniu, czyli obliczeniu prawdopodobieństwa uzyskania tej samej liczby oczek w rzucie dwiema symetrycznymi kostkami sześciennymi. Tylko 8,7% zdających potrafiło poprawnie to zadanie rozwiązać. Ostatni, czwarty, punkt za rozwiązanie gubili ci zdający, którzy niepoprawnie rozwiązywali nierówność wykładniczą (błędna interpretacja znaku nierówności ze względu na monotoniczność funkcji wykładniczej) – łatwość tej czynności to zaledwie 0,10.

Komentarz do zadania 14:
Zadanie 14. sprawdzało umiejętności obliczania sum częściowych ciągu arytmetycznego oraz obliczania granicy ciągu liczbowego. Mimo typowego kontekstu zadanie dla tej grupy zdających okazało się umiarkowanie trudne (łatwość 0,52). W treści zadania zabrakło informacji o tym, że licznik i mianownik

danego ułamka zawierają sumy częściowe pewnych ciągów arytmetycznych, a mimo to prawie 40% zdających zauważa to i korzystając ze znanych wzorów bezbłędnie oblicza podaną granicę. Co trzeci maturzysta (34,3%) opuszcza to zadanie bądź popełnia błędy, które kosztują go utratę wszystkich punktów. Takim najczęstszym błędem było natychmiastowe wyłączanie w liczniku i mianowniku wspólnego czynnika przed nawias (czyli n), skracanie go i przejście do granicy. Pozostali zdający popełniali błędy rachunkowe w sumowaniu wyrazów ciągów, tracąc w ten sposób pojedyncze punkty, ale jeżeli konsekwentnie używali błędnego wyniku sumy, mieli szansę na otrzymanie ostatniego punktu za poprawne obliczenie granicy ciągu – łatwość tej czynności jest największa i równa się 0,57.

Zadanie 14.

L.p.	**Opis wykonywanej czynności**	**Liczba punktów za czynność**	**Łatwość czynności**	**Badany standard**
14.1	Wyznaczenie: a_1, r, S_n jeśli $a_n = 3n - 2$ (w tym 1 p. za metodę oraz 1 p. za obliczenia): $a_1 = 1, r = 3, S_n = \frac{3n^2 - n}{2}$	**2 pkt**	**0,52**	**II.2)R**
14.2	Wyznaczenie: b_1, r', S'_n jeśli $b_n = 2n + 3$ (w tym 1 p. za metodę oraz 1 p. za obliczenia): $b_1 = 5, r' = 2, S'_n = n^2 + 4n$	**2 pkt**	**0,50**	**II.2)R**
14.3	Obliczenie granicy: $\frac{3}{2}$	**1 pkt**	**0,57**	**II.2)R**

Podstawowe wskaźniki statystyczne zadania w populacji zdających (N = 5772)	
Średnia zdobytych punktów	**2,62**
Łatwość zadania	**0,52**
Współczynnik korelacji zadania z całym arkuszem	**0,71**

Rozkład uzyskiwanych punktów	
0 punktów	**1983 (34,3%)**
1 punkt	**564 (9,8%)**
2 punkty	**160 (2,8%)**
3 punkty	**311 (5,4%)**
4 punkty	**456 (7,9%)**
5 punktów	**2298 (39,8%)**

Zadanie 15.

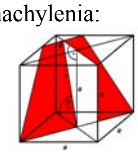
L.p.	**Opis wykonywanej czynności**	**Liczba punktów za czynność**	**Łatwość czynności**	**Badany standard**
15.1	Zapisanie wektora $\overrightarrow{MN}$ jako sumy odpowiednich wektorów: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \quad (1)$ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \quad (2)$	**1 pkt**	**0,84**	**II.1b)**
15.2	Dodanie równości (1) i (2) stronami	**1 pkt**	**0,87**	**II.1b)**
15.3	Przekształcenie wyniku do prostej postaci: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \right)$	**1 pkt**	**0,81**	**II.1b)**
15.4	Zinterpretowanie otrzymanego wyniku	**1 pkt**	**0,67**	**II.1b)**

Podstawowe wskaźniki statystyczne zadania w populacji zdających (N = 5772)	
Średnia zdobytych punktów	**3,18**
Łatwość zadania	**0,80**
Współczynnik korelacji zadania z całym arkuszem	**0,42**

Rozkład uzyskiwanych punktów	
0 punktów	**586 (10,2%)**
1 punkt	**171 (3%)**
2 punkty	**395 (6,8%)**
3 punkty	**1067 (18,5%)**
4 punkty	**3553 (61,6%)**

Komentarz:
Zadanie 15. sprawdzało umiejętność zastosowania przedstawionego algorytmu do rozwiązania problemu teoretycznego. Środkowe zadanie w tym arkuszu było dla tej grupy zdających zadaniem łatwym (łatwość 0,80). 61,6% zdających otrzymało wszystkie punkty za jego rozwiązanie, a 18,5% najczęściej gubiło tylko jeden – ostatni punkt za błędną interpretację otrzymanego wyniku (brakowało bardzo często zapisu o równoległości wektora $\overrightarrow{MN}$). Zatem ponad 80% zdających przeczytało przedstawiony algorytm postępowania i z powodzeniem zastosowało go w nowej sytuacji. Co dziesiąty maturzysta nie podejmował próby jego rozwiązania, bądź wykonywał własne dowody własności trapezu, nie interesując się zupełnie treścią zadania. Zastanawiające były także puste miejsca pod tekstem tego zadania spotykane w wielu pracach zdających, którzy za całą pracę uzyskiwali ponad 40 punktów. Czyżby zadania ilustrujące standard II.1.b stanowiły jeszcze jakąś nowość i zaskoczyły tych zdających?

Zadanie 16.

L.p.	Opis wykonywanej czynności	Liczba punktów za czynność	Łatwość czynności	Badany standard
16.1	Sporządzenie rysunku wraz z oznaczeniami i zaznaczenie kąta nachylenia: 	2 pkt	0,29	III.1c)
16.2	Obliczenie długości wysokości h trapezu: $h = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$	1 pkt	0,10	II.2)R
16.3	Obliczenie długości krótszej podstawy b trapezu: $b = \frac{\left(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)a}{3}$	1 pkt	0,04	II.2)R
16.4	Obliczenie pola S trapezu: $S = \frac{2\left(\sqrt{6} - 1\right)a^2}{3}$	1 pkt	0,28	II.2)R

Podstawowe wskaźniki statystyczne zadania w populacji zdających (N = 5772)	
Średnia zdobytych punktów	**1,00**
Łatwość zadania	**0,20**
Współczynnik korelacji zadania z całym arkuszem	**0,50**

Rozkład uzyskiwanych punktów	
0 punktów	**2661 (46,1%)**
1 punkt	**1590 (27,5%)**
2 punkty	**880 (15,2%)**
3 punkty	**305 (5,3%)**
4 punkty	**196 (3,4%)**
5 punktów	**140 (2,4%)**

Komentarz:
Zadanie 16. sprawdzało umiejętności wyznaczenia przekroju płaskiego sześcianu, obliczania pól figur płaskich z zastosowaniem trygonometrii oraz stosowania własności jednokładności i podobieństwa w rozwiązywaniu zadań. Czytelny i jasny kontekst zadania nie przełożył się na łatwość zadania – zadanie okazało się trudne (wskaźnik łatwości 0,20). Niemal co drugi maturzysta (46,1%) nie otrzymał za nie żadnego punktu, łącznie zaś ponad 70% maturzystów zdobyło nie więcej niż 1 punkt. Poprawne rozwiązania potrafiło podać jedynie 2,4% zdających. Maturzystom najczęściej brakowało umiejętności analizy rodzaju przekroju sześcianu, jaki otrzymuje się w tym zadaniu. Umiejętności oceny poprawności rozumowania zabrakło także tym zdającym, którzy na swoim rysunku zaznaczali trójkąt równoramienny jako otrzymany przekrój i nie zastanawiali się już nad jawną sprzecznością, do jakiej prowadzi obliczenie tangensa kąta nachylenia tego przekroju do płaszczyzny podstawy $tg60^\circ = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \neq \sqrt{3}$).

Pozostali zdający punkty gubili najczęściej punkty obliczeniach wysokości trapezu (definicje funkcji trygonometrycznych), długości krótszej podstawy trapezu, bądź też w końcowych przekształceniach pola trapezu.

Zadanie 17.

L.p.	Opis wykonywanej czynności	Liczba punktów za czynność	Łatwość czynności	Badany standard
17.1	Wprowadzenie oznaczeń, np.: $x=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7},\quad y=\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7},\quad a=x-y$ lub $a=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ i $a^3=\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^3$	1 pkt	0,15	III.2)R
17.2	Skorzystanie z tożsamości: $(x-y)^3=x^3-y^3-3xy(x-y)$	1 pkt	0,15	III.2)R
17.3	Wykorzystanie tożsamości i oznaczeń do uzyskania równania z niewiadomą a (w tym 1 p. za metodę oraz 1 p. za obliczenia): $a^3=14-3a$ (*)	2 pkt	0,08	III.2)R
17.4	Wyznaczenie całkowitego pierwiastka równania (*): $a=2$	1 pkt	0,07	III.2)R
17.5	Zapisanie równania (*) w postaci iloczynowej: $(a-2)(a^2+2a+7)=0$ lub stwierdzenie, że równanie (*) ma jeden pierwiastek	1 pkt	0,07	III.2)R
17.6	Wykazanie, że $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ jest liczbą całkowitą -sprawdzenie warunku $\Delta\langle 0$ i uzasadnienie, że $a=2$ jest jedynym rzeczywistym pierwiastkiem równania (*)	1 pkt	0,07	III.2)R

Podstawowe wskaźniki statystyczne zadania w populacji zdających (N = 5772)	
Średnia zdobytych punktów	**0,64**
Łatwość zadania	**0,09**
Współczynnik korelacji zadania z całym arkuszem	**0,55**

Rozkład uzyskiwanych punktów	
0 punktów	**4670 (80,9%)**
1 punkt	**465 (8,1%)**
2 punkty	**185 (3,2%)**
3 punkty	**53 (0,9%)**
4 punkty	**10 (0,17%)**
5 punktów	**8 (0,013%)**
6 punktów	**34 (0,58%)**
7 punktów	**347 (6%)**

Komentarz:
Zadanie 17. sprawdzało umiejętność przeprowadzenia rozumowania typu matematycznego z wykorzystaniem m.in. wzorów skróconego mnożenia. Najtrudniejsze zadanie w arkuszu – wskaźnik łatwości jedynie 0,07 (zadanie bardzo trudne). Ponad 80% zdających nie zdobyło ani jednego punktu. Jedynie 6% maturzystów rozwiązało je całkowicie poprawnie. Zadanie z racji umiejętności potrzebnych do jego rozwiązania umiejętności mogłoby pewnie być wykorzystane na konkursie matematycznym. Zdający nie otrzymywał w treści zadania jakiejkolwiek wskazówki, stąd jeżeli były rozwiązania poprawne, to sposób opisany w schemacie oceniania był spotykany rzadko. Za to o wiele częściej rozwiązania zdających były eleganckie, zapisane w trzech linijkach, na przykład tak:

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}+6+3\sqrt{2}+1}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^3}=\sqrt{2}+1$$

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}-6+3\sqrt{2}-1}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-1\right)^3}=\sqrt{2}-1$$

stąd $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=\sqrt{2}+1-\left(\sqrt{2}-1\right)=2$

Czyżby zatem ten typ zadania było aż tak dobrze znany tym zdającym?

Zadanie 18.

L.p.	Opis wykonywanej czynności	Liczba punktów za czynność	Łatwość czynności	Badany standard
18.1	Doprowadzenie układu do równania jednej zmiennej i rozwiązanie	**2 pkt**	**0,68**	**II.2a)**
18.2	Wyznaczenie współrzędnych wierzchołków czworokąta: $A = (-1, -3)$, $B = (1, -3)$, $C = (3, 5)$, $D = (-3, 5)$	**1 pkt**	**0,57**	**II.2a)**
18.3	Uzasadnienie że czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym, np. $AB \parallel CD$ oraz $\lvert AD \rvert = \lvert BC \rvert$	**1 pkt**	**0,53**	**III.2b)R**
18.4	Wyznaczenie równania symetralnej odcinka BC: $x + 4y - 6 = 0$	**1 pkt**	**0,23**	**II.2a)**
18.5	Wyznaczenie współrzędnych środka okręgu: $O = \left(0, \frac{3}{2}\right)$	**1 pkt**	**0,21**	**II.2a)**
18.6	Obliczenie długości promienia okręgu: $r = \frac{\sqrt{85}}{2}$	**1 pkt**	**0,21**	**II.2a)**
18.7	Zapisanie równania okręgu: $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{85}{4}$	**1 pkt**	**0,28**	**I.9a)R**

Podstawowe wskaźniki statystyczne zadania w populacji zdających (N = 5772)	
Średnia zdobytych punktów	**3,40**
Łatwość zadania	**0,42**
Współczynnik korelacji zadania z całym arkuszem	**0,77**

Rozkład uzyskiwanych punktów	
0 punktów	**1232 (21,3%)**
1 punkt	**750 (13%)**
2 punkty	**369 (6,4%)**
3 punkty	**441 (7,6%)**
4 punkty	**1162 (20,1%)**
5 punktów	**441 (7,6%)**
6 punktów	**335 (5,8%)**
7 punktów	**394 (6,8%)**
8 punktów	**648 (11,2%)**

Komentarz:

Zadanie 18. sprawdzało umiejętności rozwiązania układu równań stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi, wykazania, że dany czworokąt jest trapezem równoramiennym oraz wyznaczenia równania okręgu opisanego na trapezie równoramiennym. Zadanie to okazało się trudne (łatwość 0,42) – mimo czytelnego kontekstu. Co piąty zdający (21,3%) nie otrzymał żadnego punktu za rozwiązanie tego zadania. Częściej jednak dlatego, że w ogóle nie podejmował próby jego rozwiązania, chociaż byli i tacy maturzyści, którym nie udało się rozwiązać podanego układu równań i na tych usiłowaniach swoje rozwiązania kończyli. Wszystkie punkty otrzymało 11,2% zdających. Pozostali popełniali błędy w różnych miejscach rozwiązania. A to mieli kłopoty z poprawnym ustaleniem współrzędnych wierzchołków trapezu otrzymanych z równania kwadratowego lub dwukwadratowego w zależności od tego, jakie podstawienie wykonali. A to w uzasadnieniu, że trapez jest równoramienny zapominali powołać się na równoległość pary boków tego czworokąta, poprzestając na wykazaniu, że ramiona mają jednakowe długości. Uwagę zwraca duża grupa zdających (20,1%), którzy uzyskali za swoje rozwiązania 4 punkty. Większość z nich poradziła sobie z układem równań, wyznaczyła współrzędne wierzchołków oraz uzasadniła, że dany trapez jest równoramienny. Zabrakło im natomiast czasu, a niektórym także i umiejętności, aby wyznaczyć równanie okręgu opisanego na trapezie. Wspomniane równanie było wyznaczane albo tak jak to opisuje schemat oceniania, albo przez wstawienie do równania okręgu współrzędnych trzech wierzchołków trapezu. Ten drugi sposób wymagał jednak cierpliwego rachowania. Zadanie 18. w ogóle zmuszało zdających do dobrego gospodarowania miejscem przeznaczonym na rozwiązanie. Wspomnieć jeszcze należy o tych zdających, którzy pierwsze równanie danego układu zapisywali niesztampowo, w postaci równości kwadratów wyrażeń: $(y+1)^2 = 4x^2$. Jednakże po wyciągnięciu z niego poprawnego wniosku, że $|y+1| = |2x|$, budowali, niestety, sztampowe 4 układy i tracili sporo czasu na ich rozwiązanie, nie mówiąc już o błędach rachunkowych w ich rozwiązywaniu.

Zadanie 19.

L.p.	Opis wykonywanej czynności	Liczba punktów za czynność	Łatwość czynności	Badany standard
19.1	Określenie warunków istnienia rzeczywistych pierwiastków równania: $\Delta \geq 0$ dla $m \in \left\langle -6; \frac{4}{3} \right\rangle$	1 pkt	0,32	III.2)R
19.2	Określenie wzoru funkcji $m \to f(m) = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$: $f(m) = \frac{-m+5}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}$	1 pkt	0,56	III.2)R
19.3	Określenie dziedziny funkcji *f*: $m \in \left\langle -6; -\frac{1}{2} \right) \cup \left(-\frac{1}{2}; \frac{4}{3} \right\rangle$	1 pkt	0,12	III.2)R
19.4	Zastosowanie wzoru na pochodną ilorazu	1 pkt	0,40	II.2)R
19.5	Obliczenie pochodnej funkcji *f*	1 pkt	0,33	II.2)R
19.6	Określenie miejsca zerowego pochodnej funkcji *f*: $m = 10\frac{1}{2}$	1 pkt	0,33	III.2)R
19.7	Obliczenie wartości $f(-6)$ i $f\left(\frac{4}{3}\right)$: $f(-6) = \frac{4}{11}$, $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{12}{11}$	2 pkt	0,06	III.2)R
19.8	Zbadanie znaku pochodnej funkcji: $f'(m) \rangle 0$ dla $m \in \left(-6 : -\frac{1}{2} \right)$, $f'(m) \langle 0$ dla $m \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{4}{3} \right)$	1 pkt	0,24	III.2)R
19.9	Uzasadnienie, że $f(-6) = \frac{4}{11}$ jest najmniejszą wartością funkcji ($m = \frac{21}{2}$ leży poza przedziałem określoności).	1 pkt	0,06	III.2)R

Podstawowe wskaźniki statystyczne zadania w populacji zdających (N = 5772)	
Średnia zdobytych punktów	**2,47**
Łatwość zadania	**0,25**
Współczynnik korelacji zadania z całym arkuszem	**0,82**
Rozkład uzyskiwanych punktów	
0 punktów	**2064 (35,8%)**
1 punkt	**821 (14,2%)**
2 punkty	**483 (8,4%)**
3 punkty	**334 (5,8%)**
4 punkty	**531 (9,2%)**
5 punktów	**687 (11,9%)**
6 punktów	**455 (7,9%)**
7 punktów	**187 (3,2%)**
8 punktów	**70 (1,2%)**
9 punktów	**74 (1,3%)**
10 punktów	**66 (1,1%)**

Komentarz:

Zadanie 19. sprawdzało umiejętności wyznaczenia dziedziny funkcji wymiernej z wykorzystaniem wzorów Viete'a oraz stosowania pochodnej funkcji do rozwiązania zagadnienia optymalizacyjnego. Ostatnie zadanie w tym arkuszu i znowu dużo (ba, najwięcej, bo 10) punktów do zdobycia. Zdający, którzy kolejno rozwiązywali zadania z arkusza, na zakończenie trwającego cztery i pół godziny egzaminu otrzymali do rozwiązania dwa zadania (18. i 19.) wielopunktowe, wymagające cierpliwości i koncentracji. To pewnie jedna z przyczyn niskich wyników w obu tych zadaniach. Zadanie 19. okazało się jeszcze trudniejsze niż 18. – jego wskaźnik łatwości równa się tylko 0,25. Jedynie 1,1% zdających potrafiło w całości poprawnie to zadanie rozwiązać. Co trzeci zdający (35,8%) nie uzyskał żadnego punktu za jego rozwiązanie – częściej były to jednak puste miejsca pod tekstem zadania niż błędne rozwiązania. Rozkład uzyskiwanych przez zdających punktów pokazuje, że w różnych miejscach rozwiązania zdający popełniali błędy. Na początku rozwiązania zapominali o sprawdzeniu warunku istnienia rzeczywistych pierwiastków danego równania – choć byli i tacy zdający, którzy zbadali wspomniany warunek, a końcowych rozumowaniach nie brali go w ogóle pod uwagę. Zdający nie mieli większych problemów z zastosowaniem wzorów Viete'a do zbudowania żądanej funkcji wymiernej, lecz i tutaj ponownie brakowało ostrożności przy określaniu jej dziedziny. Pozostałe czynności w rozwiązaniu należały już do procedury badania najmniejszej wartości funkcji. W ich toku ujawniły się nieliczne błędy rachunkowe w stosowaniu wzoru na pochodną ilorazu. Poważniejsze błędy są związane z brakiem umiejętności odróżnienia minimum lokalnego od najmniejszej wartości funkcji. Brakowało poprawnego komentarza. Już poszukiwanie lokalnego minimum i uzasadnianie, że jest ono w danym punkcie, zostało zastąpione nieporządnymi rysunki czy wręcz szkicami z naniesionymi znakami pochodnej – bez jakiejkolwiek interpretacji. Dobrze to widać, na rozkładzie punktów uzyskiwanych przez zdających. Sześć początkowych punktów zdobyło 57,4% zdających, zaś końcowe cztery punkty w tym zadaniu zdobywała niewielka grupa (6,8%) zdających, którzy dobrze rozumieli niuanse zagadnień optymalizacyjnych.

4. Praca zespołów egzaminatorów matematyki

Arkusze egzaminacyjne z obu poziomów egzaminu maturalnego z matematyki sprawdzało i oceniało 200 licencjonowanych egzaminatorów zgrupowanych w 10 zespołów egzaminatorów.

Egzaminatorzy, pracując pod kierunkiem Przewodniczących Zespołów Egzaminatorów, stosowali ustalony centralnie i jednolity w całym kraju schemat punktowania oraz zasady oceniania zadań otwartych wprowadzone na szkoleniach kandydatów na egzaminatorów, a następnie utrwalane na szkoleniach uzupełniających, które przeprowadzono w I kwartale 2005 r. Nad poprawnym stosowaniem schematów punktowania przez egzaminatorów wraz z Przewodniczącymi czuwali weryfikatorzy merytoryczni – po dwóch w każdym zespole egzaminatorów. We wszystkich zespołach pracowali ponadto asystenci techniczni, których zadaniem było kontrolowanie poprawności wypełnienia kart punktowych we wszystkich arkuszach.

Analiza uwag przekazanych przez egzaminatorów matematyki w anonimowych ankietach pozwoli na wyciągnięcie wniosków odniesieniu, między innymi, do procedur pracy zespołów egzaminatorów w kolejnych sesjach egzaminacyjnych. Na podstawie liczbowych danych zawartych w tych ankietach można spróbować określić, kim był egzaminator matematyki pracujący w sesji wiosennej 2005 r. egzaminu maturalnego.

A zatem statystyczny egzaminator matematyki to kobieta, nauczyciel mianowany ze stażem pracy ponad 25 lat. W kryterialnej ocenie prac egzaminacyjnych z obu poziomów egzaminu bierze udział już po raz drugi – pierwsze w tym względzie doświadczenia wiążą się z próbnym egzaminem maturalnym we wrześniu 2001 r.

5. Podsumowanie

Przeprowadzona w rozdziale 2. statystyczna analiza wyników, uzupełniona (w rozdziale 3.) komentarzami do poszczególnych zadań, a nawet czynności w tych zadaniach pozwalają ocenić stopień opanowania umiejętności zawartych w standardach wymagań egzaminacyjnych, które są podstawą przeprowadzania egzaminu maturalnego z matematyki.

W Arkuszu I, dla poziomu podstawowego i jednocześnie I części poziomu rozszerzonego, zdający najlepiej zaprezentowali umiejętności opisane standardem I, czyli znajomość pojęć i ich rozumienie (wykres 8. rozdział 2.) nieco gorzej opanowali umiejętności korzystania z informacji (standard II) oraz tworzenia informacji (standard III). Nieznaczna różnica między obliczonymi wskaźnikami łatwości dla standardu II i III mogłaby zostać zinterpretowana w ten sposób, że zdający równie łatwo rozwiązuje problemy jak korzysta z informacji. Tymczasem umiejętności precyzyjnie opisane standardem II są istotną nowością na egzaminie maturalnym z matematyki, odróżniającą ten egzamin od egzaminu dojrzałości. Dlatego wydaje się, że interpretacja tych wskaźników powinna być inna. To znaczy, zdający egzamin maturalny z matematyki w sesji wiosennej 2005 r., z jednakowymi trudnościami korzystali z informacji jak też rozwiązywali problemy. Na treść większości zadań z tego arkusza składały się informacje co najmniej dwuzdaniowe, których przeczytanie ze zrozumieniem i poprawne zinterpretowanie stanowiło dla zdających największą trudność. Dodatkowych kłopotów (analiza i interpretacja sytuacji) przysparzały zdającym zadania kontekstu realistycznego, których w tym zestawie było pięć. Konsekwencją były najniższe wyniki w trzech najtrudniejszych zadaniach z tego arkusza: w **zadaniu 5.**, w **zadaniu 9**. oraz w **zadaniu 8**.

Arkusz II, stanowiący część drugą egzaminu na poziomie rozszerzonym, w niemal równym stopniu badał umiejętności opisane w standardzie II (24 punkty do zdobycia), co w standardzie III (22 punkty do zdobycia). Obliczone wskaźniki łatwości dla obu standardów (kolejno 0,44 i 0,18) pokazują, że zdający mieli istotne trudności w wykazaniu się umiejętnościami tworzenia informacji (rozwiązywania problemów). Trudności te były związane między innymi z kontekstami, w jakich umiejętności były sprawdzane. Odwoływanie się do własności funkcji trygonometrycznych oraz własności działań na potęgach o wykładnikach wymiernych było jednym z powodów najniższych wyników w dwóch bardzo trudnych zadaniach z tego arkusza: **zadaniu 12.** oraz **zadaniu 17.** Kolejne trzy zadania: **zadanie 16.**, **zadanie 13.** i **zadanie 19.** pokazały, że stereometria połączona (dość naturalnie i typowo) z trygonometrią, schemat Bernoullego, czy w końcu stosowanie pochodnej funkcji w zadaniu optymalizacyjnym stanowią treści, na których dość łatwo można zbudować zadania trudne dla zdających.

Wskaźniki łatwości obliczone dla obu arkuszy pokazują, że były one zdecydowanie trudniejsze dla uczniów liceów profilowanych. Różnica ta jest bardzo wyraźna zwłaszcza w odniesieniu do Arkusza II.

Poniżej już na zakończenie została umieszczona tabela 8. zawierająca procentowy rozkład wyników uczniów naszego okręgu (województwa dolnośląskie i opolskie) w skali staninowej, przygotowanej przez Centralną Komisję Egzaminacyjną na podstawie wyników wszystkich maturzystów z całego kraju (skala jest dostępna na stronie internetowej www.cke.edu.pl). Ilustruje ona między innymi, ile procent zdających egzamin maturalny z matematyki w naszym okręgu zawiera określony centralnie stanin.

Tabela 8. Procentowy rozkład wyników zdających w skali staninowej
(matematyka – sesja wiosenna 2005 r.)

Staninowy podział wyników	**Arkusz I**		**Arkusz II**	
	Przedział punktowy	**Procent zdających (okręg)**	**Przedział punktowy**	**Procent zdających (okręg)**
I Stanin – najniższy	0–7 pkt	**5,21%**	0–2 pkt	**5,36%**
II Stanin – bardzo niski	8–11 pkt	**6,86%**	3–4 pkt	**6,85%**
III Stanin - niski	12–16 pkt	**11,69%**	5–8 pkt	**15,51%**
IV Stanin – niżej średni	17–22 pkt	**17,19%**	9–13 pkt	**16,55%**
V Stanin – średni	23–29 pkt	**20,57%**	14–19 pkt	**19,62%**
VI Stanin – wyżej średni	30–36 pkt	**16,02%**	20–25 pkt	**16,67%**
VII Stanin – wysoki	37–43 pkt	**13,31%**	26–30 pkt	**9,87%**
VIII Stanin – bardzo wysoki	44–47 pkt	**5,80%**	31–37 pkt	**6,48%**
IX Stanin – najwyższy	48–50 pkt	**3,35%**	38–50 pkt	**3,09%**