Okręgowa Komisja Egzaminacyjna we Wrocławiu

# MATEMATYKA

# EGZAMIN MATURALNY 2009
# na Dolnym Śląsku i Opolszczyźnie

## SPRAWOZDANIE OKRĘGOWE

Wrocław 2009

Opracowanie:
Mieczysław Fałat

© Copyright by Okręgowa Komisja Egzaminacyjna we Wrocławiu 2009

**Spis treści**

1. Podstawowe dane statystyczne ..... 4
2. Co z tą trygonometrią? Słów kilka o kłopotach maturzystów .....13
3. Zamiast podsumowania.....25

## 1. Podstawowe dane statystyczne

Spośród 36 859 tegorocznych absolwentów szkół ponadgimnazjalnych w naszym okręgu do egzaminu maturalnego z matematyki przystąpiło 7635 absolwentów (20,7% przystępujących po raz pierwszy). 6177 osób wybrało matematykę jako przedmiot obowiązkowy, w tym 3656 absolwentów wybrało poziom podstawowy, zaś 2521 poziom rozszerzony (pozostali, w liczbie 1458 wybrali matematykę jako przedmiot dodatkowy) – tabela 1.

Tabela 1. Liczby zdających egzamin maturalny z matematyki – zestaw standardowy[1]

| Wyszczególnienie | Liczba zdających | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | obowiązkowo | | | dodatkowo | RAZEM |
| | poziom podstawowy | poziom rozszerzony | RAZEM | poziom rozszerzony | |
| OKE Wrocław | | | | | |
| LO | 2366 | 2456 | 4822 | 1328 | 6150 |
| LP | 350 | 22 | 372 | 39 | 411 |
| LU | 20 | | 20 | 1 | 21 |
| T | 914 | 43 | 957 | 89 | 1046 |
| TU | 6 | | 6 | 1 | 7 |
| RAZEM | 3656 | 2521 | 6177 | 1458 | 7635 |
| dolnośląskie | | | | | |
| LO | 1806 | 1948 | 3754 | 1015 | 4769 |
| LP | 278 | 22 | 300 | 38 | 338 |
| LU | 16 | | 16 | 1 | 17 |
| T | 555 | 29 | 584 | 61 | 645 |
| TU | 2 | | 2 | 1 | 3 |
| RAZEM | 2657 | 1999 | 4656 | 1116 | 5772 |
| opolskie | | | | | |
| LO | 560 | 508 | 1068 | 313 | 1381 |
| LP | 72 | | 72 | 1 | 73 |
| LU | 4 | | 4 | | 4 |
| T | 359 | 14 | 373 | 28 | 401 |
| TU | 4 | | 4 | | 4 |
| RAZEM | 999 | 522 | 1521 | 342 | 1863 |

Zdający, którzy wybrali matematykę jako przedmiot obowiązkowy musieli uzyskać co najmniej 15 punktów spośród 50 możliwych do zdobycia w arkuszu egzaminacyjnym. Średnia zdawalność egzaminu w całym okręgu wyniosła 79% na poziomie podstawowym i 97% na poziomie rozszerzonym. Zdawalność była wyższa w województwie opolskim (odpowiednio 80,2% i 98,1%) niż w województwie dolnośląskim (78,6% i 96,7%) i silnie

[1] Wszystkie statystyki w opracowaniu podano według stanu na dzień 30 06 2009 r.

zależała od typu szkoły – była najwyższa w liceach ogólnokształcących (85,7% i 97,3%), niższa w technikach (72,1% i 86%) i w liceach profilowanych (56% i 81,8%) – tabela 2.

Tabela 2. Wskaźniki dotyczące zdawalności egzaminu maturalnego z matematyki

| Wyszczególnienie | Uzyskali co najmniej 30% pkt na egzaminie obowiązkowym | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | poziom podstawowy | | poziom rozszerzony | | razem | |
| | liczba | % | liczba | % | liczba | % |
| OKE Wrocław | | | | | | |
| LO | 2027 | 85,7 | 2390 | 97,3 | 4417 | 91,6 |
| LP | 196 | 56,0 | 18 | 81,8 | 214 | 57,5 |
| LU | 5 | 25,0 | | | 5 | 25,0 |
| T | 659 | 72,1 | 37 | 86,0 | 696 | 72,7 |
| TU | 3 | 50,0 | | | 3 | 50,0 |
| RAZEM | 2890 | 79,0 | 2445 | 97,0 | 5335 | 86,4 |
| dolnośląskie | | | | | | |
| LO | 1537 | 85,1 | 1891 | 97,1 | 3428 | 91,3 |
| LP | 163 | 58,6 | 18 | 81,8 | 181 | 60,3 |
| LU | 4 | 25,0 | | | 4 | 25,0 |
| T | 384 | 69,2 | 24 | 82,8 | 408 | 69,9 |
| TU | 1 | 50,0 | | | 1 | 50,0 |
| RAZEM | 2089 | 78,6 | 1933 | 96,7 | 4022 | 86,4 |
| opolskie | | | | | | |
| LO | 490 | 87,5 | 499 | 98,2 | 989 | 92,6 |
| LP | 33 | 45,8 | | | 33 | 45,8 |
| LU | 1 | 25,0 | | | 1 | 25,0 |
| T | 275 | 76,6 | 13 | 92,9 | 288 | 77,2 |
| TU | 2 | 50,0 | | | 2 | 50,0 |
| RAZEM | 801 | 80,2 | 512 | 98,1 | 1313 | 86,3 |

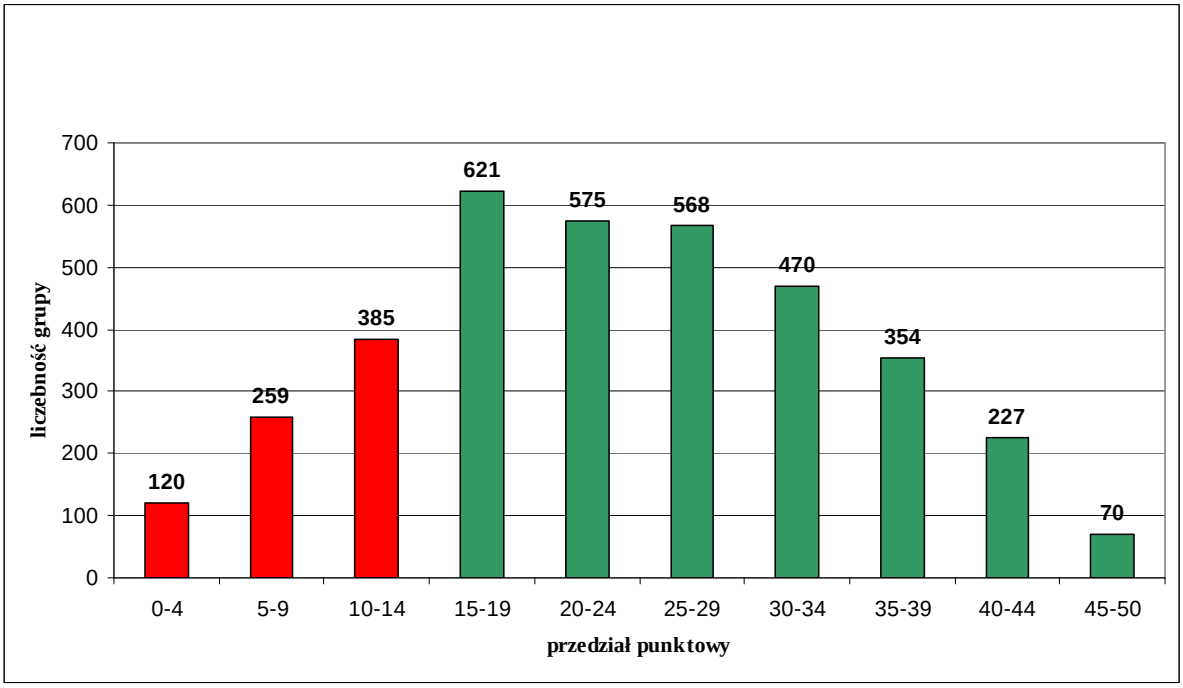
Średni wynik procentowy na poziomie podstawowym wyniósł 47%, zaś na poziomie rozszerzonym 55,3% (a dokładniej: 64% dla tych zdających, którzy matematykę na poziomie rozszerzonym wybrali jako przedmiot obowiązkowy i 40%, jeżeli był to przedmiot dodatkowy) – tabela 3.

Tabela 3. Średni wynik procentowy zdających egzamin maturalny z matematyki

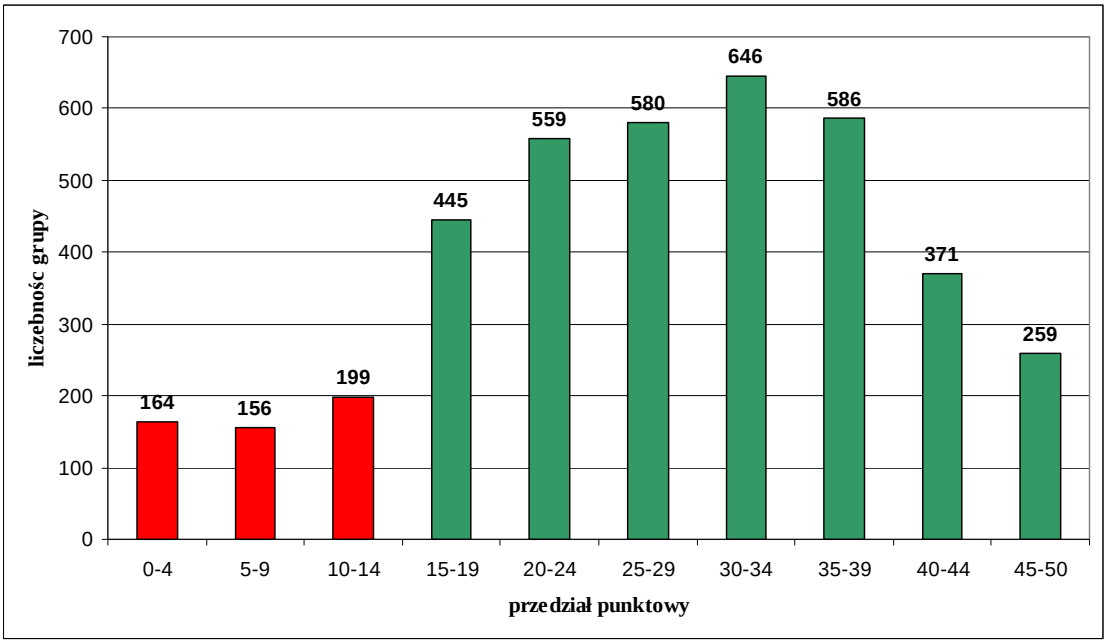
| Wyszczególnienie | Średni wynik procentowy | | | |
|---|---|---|---|---|
| | obowiązkowy | | dodatkowy PR | PR razem |
| | PP | PR | | |
| OKE Wrocław | | | | |
| LO | 51,5 | 64,3 | 42,1 | 56,6 |
| LP | 35,1 | 53,2 | 18,3 | 30,9 |
| LU | 19,3 | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| T | 40,6 | 53,1 | 19,2 | 30,2 |
| TU | 22,7 | | 2,0 | 2,0 |
| RAZEM | 47,0 | 64,0 | 40,0 | 55,3 |
| dolnośląskie | | | | |
| LO | 50,9 | 64,0 | 41,9 | 56,5 |
| LP | 36,5 | 53,2 | 18,6 | 31,3 |
| LU | 18,1 | | | |
| T | 39,0 | 48,3 | 18,4 | 28,0 |
| TU | 16,0 | | 2,0 | 2,0 |
| RAZEM | 46,7 | 63,7 | 39,7 | 55,2 |
| opolskie | | | | |
| LO | 53,6 | 65,5 | 42,7 | 56,8 |
| LP | 29,7 | | 6,0 | 6,0 |
| LU | 24,0 | | | |
| T | 43,2 | 62,9 | 21,0 | 35,0 |
| TU | 26,0 | | | |
| RAZEM | 47,9 | 65,4 | 40,8 | 55,7 |

Dwa kolejne wykresy ilustrują rozkłady wyników punktowych na każdym poziomie egzaminu. Wyniki zostały pogrupowane w klasy o długości pięciu punktów z arkusza – wykresy 1. i 2.




Wykres 1. Rozkład wyników punktowych na egzaminie maturalnym z matematyki na poziomie podstawowym w maju 2009 r. (zdający po raz pierwszy)




Wykres 2. Rozkład wyników punktowych na egzaminie maturalnym z matematyki na poziomie rozszerzonym w maju 2009 r. (zdający po raz pierwszy)

Uwagę zwracają różnice w kształcie rozkładów oraz liczebności grup osiągających najwyższe oraz najniższe wyniki na egzaminie. Dodajmy, że maksymalną liczbę 50 punktów na poziomie podstawowym uzyskały 4 osoby, zaś na poziomie rozszerzonym 50 osób. Na drugim biegunie są zdający, którzy nie uzyskali żadnego punktu – było 7 takich osób na poziomie podstawowym i 45 na poziomie rozszerzonym.

**Arkusze egzaminacyjne (standardowe)**

Centralna Komisja Egzaminacyjna przygotowała dwa arkusze egzaminacyjne, a w każdym z nich 11 zadań otwartych o zróżnicowanej punktacji. Zadania badały umiejętności opisane we wszystkich trzech obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych (I - wiadomości i rozumienie, II - korzystanie z informacji i III - tworzenie informacji) i były treściowo dostosowane do wszystkich działów podstawy programowej (9 działów z zakresu podstawowego i 10 działów z zakresu rozszerzonego). Na poziomie podstawowym zdający mógł zdobyć 36 punktów za umiejętności opisane w II obszarze standardów oraz po 7 punktów za umiejętności opisane w I i III obszarze standardów. Zdający na poziomie rozszerzonym mógł uzyskać 25 punktów za umiejętności opisane w II obszarze standardów, 19 punktów za umiejętności opisane w III obszarze i 6 punktów za umiejętności opisane w I obszarze. Precyzyjne informacje dotyczące przyporządkowania zadań do standardów wymagań egzaminacyjnych oraz treści podstawy programowej zostały zawarte w kartotekach obu arkuszy – tabela 4. i tabela 5.

Tabela 4. Kartoteka arkusza egzaminacyjnego, matematyka, poziom podstawowy, maj 2009

| Nr zadania - maksymalna liczba punktów | Badana umiejętność<br><br>Zdający: | Standard | Nr treści ze standardu I. | Liczba punktów |
|---|---|---|---|---|
| *1.*<br>*5pkt* | wyznacza wartości funkcji dla danych argumentów i miejsce zerowe funkcji | II.2)b) | 2)a) | 2 |
| | rysuje wykres funkcji | II.2)a) | 2)a) | 1 |
| | odczytuje własności funkcji liniowej | II.2)b) | 2)b) | 1 |
| | wyznacza liczby całkowite należące do danego przedziału liczbowego | I.1)c) | 1)c) | 1 |
| *2.*<br>*3pkt* | podaje opis matematyczny sytuacji przedstawionej w zadaniu w postaci układu równań liniowych | III.1)a) | 3)a) | 2 |
| | rozwiązuje układ równań liniowych | II.2)a) | 3)a) | 1 |
| *3.*<br>*5pkt* | rozwiązuje nierówność kwadratową zapisaną na podstawie tekstu zadania | II.2)a) | 3)b) | 2 |
| | podaje zbiór wartości funkcji kwadratowej | II.2)b) | 3)b) | 1 |
| | przekształca wzór funkcji do innej postaci | II.2)a) | 3)b) | 2 |
| *4.*<br>*3pkt* | stosuje prawa działań na potęgach o wykładniku naturalnym | II.2)a) | 3)b) | 2 |
| | rozwiązuje równanie liniowe | I.3)a) | 3)a) | 1 |
| *5.*<br>*5pkt* | zapisuje warunki wynikające z równości wielomianów | III.2)a) | 3)c) | 1 |
| | rozwiązuje układ równań liniowych | II.2)a) | 3)a) | 2 |
| | Rozkłada wielomian na czynniki | II.2)a) | 3)d) | 2 |
| *6.*<br>*5pkt* | stosuje definicje funkcji trygonometrycznych do rozwiązania problemu | II.2)a) | 4)a) | 2 |
| | uzasadnia nierówność | III.2)b) | 4)a) | 1 |
| | stosuje związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta do przekształcania tożsamości trygonometrycznych | II.2)a) | 4)c) | 2 |
| *7.*<br>*6pkt* | stosuje wzór na $n$-ty wyraz ciągu arytmetycznego | II.2)a) | 5)b) | 3 |
| | sprawdza z definicji, czy dany ciąg jest geometryczny | I.5)b) | 5)b) | 1 |
| | stosuje definicję sumy $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego | I.5)b) | 5)b) | 1 |
| | wykorzystuje własności funkcji kwadratowej | II.2)a) | 3)b) | 1 |
| *8.*<br>*4pkt* | dobiera odpowiedni algorytm do rozwiązania zadania | III.1)b) | 6)e) | 3 |
| | stosuje związki miarowe w figurach płaskich | I.6)b) | 6)b) | 1 |
| *9.*<br>*4pkt* | wyznacza równanie prostej spełniającej warunki zadania | II.2)a) | 7)a) | 2 |
| | oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych | II.2)a) | 3)a) | 1 |
| | wykorzystuje pojęcie odległości na płaszczyźnie kartezjańskiej | I.7)b) | 7)b) | 1 |
| *10.*<br>*5pkt* | oblicza średnią arytmetyczną | II.2)a) | 9)c) | 2 |
| | oblicza prawdopodobieństwo zdarzenia | II.2)a) | 9)b) | 3 |
| *11.*<br>*5pkt* | stosuje związki miarowe w bryłach z użyciem trygonometrii | II.2)a) | 8)c) | 4 |
| | oszacowuje wartość liczbową | I.1)i) | 1)i) | 1 |

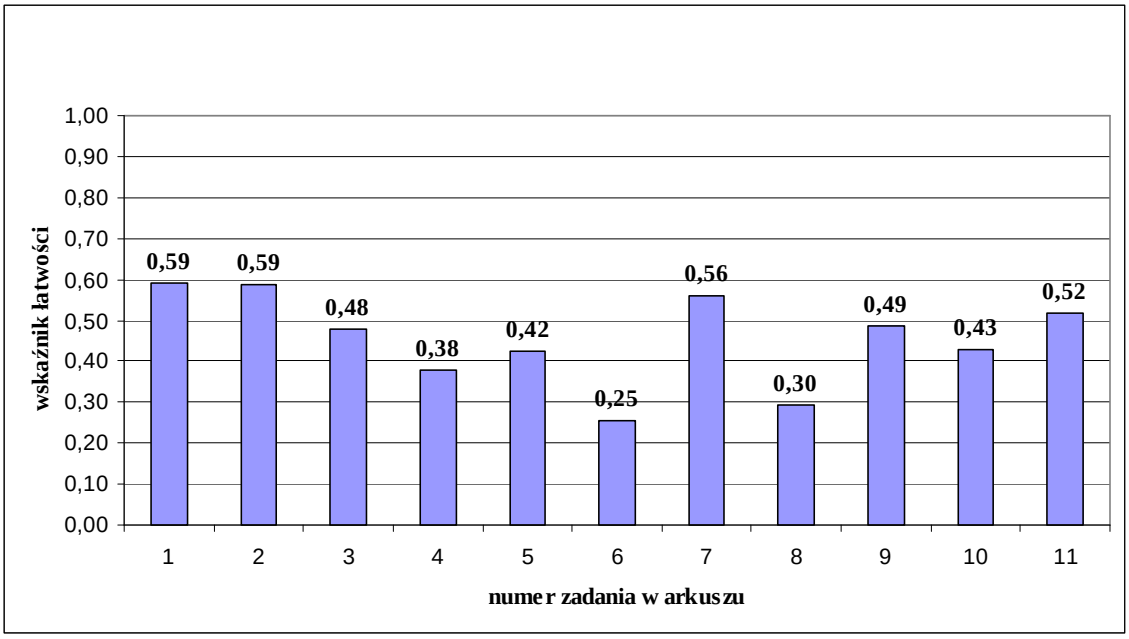
Tabela 5. Kartoteka arkusza egzaminacyjnego, matematyka, poziom rozszerzony, maj 2009

| Nr zadania - maksymalna liczba punktów | Badana umiejętność<br><br>Zdający: | Standard | Nr treści ze standardu I. | Liczba punktów |
|---|---|---|---|---|
| *1.*<br>*4pkt* | wykorzystuje pojęcia wartości argumentu i wartości funkcji | I.2)a) | 2)a) | 1 |
| | interpretuje otrzymane wyniki | III.2)a) | 2)a) | 1 |
| | rysuje w układzie współrzędnych zbiór opisany układem warunków | III.2)a) | 3)a) | 2 |
| *2.*<br>*4pkt* | zapisuje wielomian, który przy dzieleniu przez dany dwumian daje wskazany iloraz i daną resztę | II.2)a) | 3)c) | 1 |
| | wykonuje działania na wielomianach | I.3)c) | 3)c) | 1 |
| | wyznacza pierwiastki wielomianu | II.2)a) | 3)h) | 2 |
| *3.*<br>*4pkt* | wykorzystuje definicję funkcji wykładniczej | I.4a)R | 4)a)R | 1 |
| | rysuje wykres funkcji typu $y = \lvert f(x) - b \rvert$ | II.2)a) | 2)c), 2)c)R | 2 |
| | interpretuje liczbę rozwiązań równania z parametrem | III.1)b) | 4)a)R | 1 |
| *4.*<br>*5pkt* | wykorzystuje definicję ciągu arytmetycznego | II.2)a) | 5)b) | 1 |
| | podaje opis matematyczny sytuacji w postaci funkcji | III.1)a) | 3)b) | 1 |
| | formułuje wnioski wynikające z postaci badanego wyrażenia | II.2)R | 3)b) | 2 |
| | posługuje się definicją i własnościami funkcji kwadratowej | II.2)R | 3)b) | 1 |
| *5.*<br>*3pkt* | wykonuje działania na potęgach o wykładnikach rzeczywistych | II.2)a) | 1)c)R | 3 |
| *6.*<br>*5pkt* | posługuje się definicją logarytmu | II.2)a) | 4)a)R | 1 |
| | rozwiązuje nierówność kwadratową | I.3)b) | 3)b) | 1 |
| | odczytuje z wykresu odpowiedniej funkcji zbiór rozwiązań nierówności trygonometrycznej w przedziale ograniczonym | II.2)b) | 4)b) | 2 |
| | zapisuje część wspólną zbiorów w postaci sumy przedziałów liczbowych | II.2)R | 1)g) | 1 |
| *7.*<br>*6pkt* | stosuje własności ciągu geometrycznego | II.2)a) | 5)b) | 1 |
| | rozwiązuje równanie kwadratowe | I.3)b) | 3)b) | 1 |
| | wybiera ciąg spełniający warunki zadania | III.2)a) | 5)b) | 1 |
| | stosuje definicję ciągu geometrycznego | II.2)a) | 5)b) | 1 |
| | oszacowuje iloraz sumy dziewiętnastu przez sumę dwudziestu wyrazów ciągu geometrycznego | III.2)b) | 1)d), 1)e) | 2 |
| *8.*<br>*4pkt* | podaje opis matematyczny danej sytuacji problemowej | III.1)a) | 6)b), 6)e) | 2 |
| | przetwarza informacje do postaci ułatwiającej rozwiązanie problemu | III.1)c) | 1)c) | 2 |
| *9.*<br>*5pkt* | wyznacza środek i promień okręgu | I.9)a)R | 9)a)R | 1 |
| | wyznacza równanie rodziny prostych (nierównoległych do osi $Oy$ ) przechodzących przez dany punkt | II.2)a) | 7)a) | 1 |
| | analizuje wzajemne położenie prostej i okręgu | III.2)a) | 9)b)R | 1 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | stosuje wzór na odległość punktu od prostej | III.2)a) | 9)b)R | 1 |
| | wyciąga wnioski i zapisuje równanie prostej | III.2)a) | 9)b)R | 1 |
| *10.* *4pkt* | analizuje sytuację i buduje jej model matematyczny | III.1)a) | 9)a) | 3 |
| | oblicza prawdopodobieństwo zdarzenia | II.2)a) | 9)b) | 1 |
| *11.* *6pkt* | wykorzystuje funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym | II.2)a) | 4)a) | 1 |
| | rysuje przekrój ostrosłupa płaszczyzną | III.2)a) | 10)a)R | 1 |
| | stosuje twierdzenie cosinusów | II.2)a) | 8)a)R | 3 |
| | oblicza pole przekroju ostrosłupa | II.2)a) | 8)c) | 1 |

**Wskaźniki łatwości zadań**

Średni wynik procentowy zdających egzamin maturalny z matematyki na obu poziomach egzaminu (47% na poziomie podstawowym i 55,3% na poziomie rozszerzonym) jest jednocześnie wskaźnikiem łatwości całego arkusza. Przy zastosowaniu klasyfikacji B. Niemierki można stwierdzić, że arkusz egzaminacyjny przygotowany dla poziomu podstawowego był dla zdających w naszym okręgu **trudny**, zaś dla poziomu rozszerzonego **umiarkowanie trudny**. O tym, jaki wpływ miały poszczególne zadania na wielkość wskaźnika łatwości każdego arkusza informują kolejne dwa wykresy – 3. i 4.




Wykres 3. Wskaźniki łatwości zadań z arkusza dla poziomu podstawowego, egzamin maturalny z matematyki, maj 2009 r.

Siedem zadań z arkusza dla poziomu podstawowego (kolejno: 3., 4., 5., 6., 8., 9. i 10.) okazało się trudnymi dla zdających (wskaźniki łatwości zawarte między 0,2 i 0,49), zaś 4 zadania (1., 2., 7. i 11.) umiarkowanie trudnymi (wskaźniki łatwości zawarte między 0,5 i 0,69).

Najtrudniejsze w tym arkuszu to:

- zadanie 6. – badające umiejętności tworzenia informacji i korzystania z informacji w zakresie funkcji trygonometrycznych kąta ostrego,

- zadanie 8. – badające umiejętność stosowania podobieństwa trójkątów.

Najłatwiejszymi w arkuszu były:

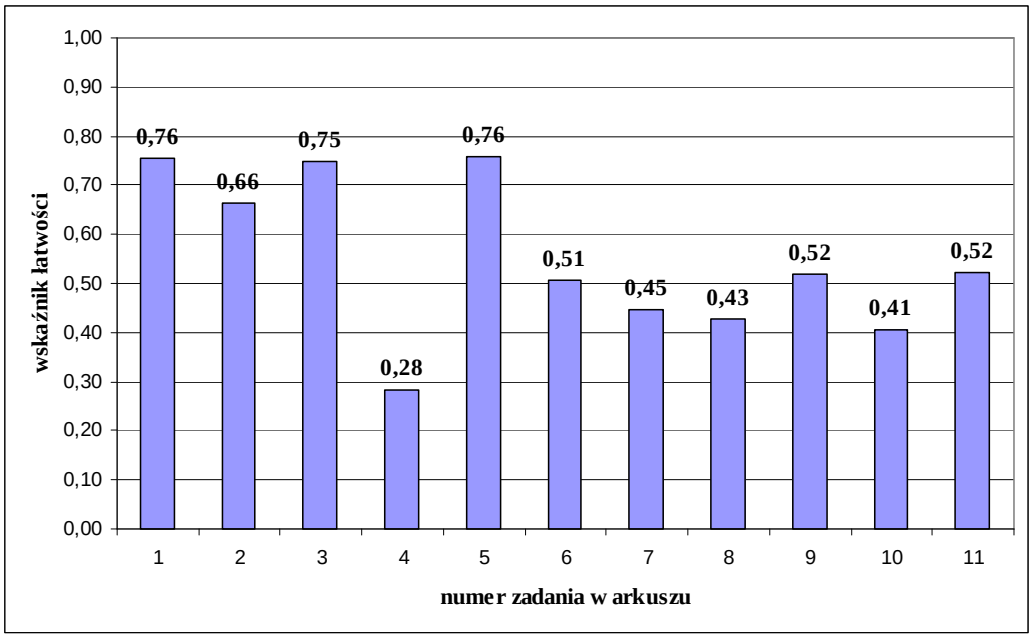
- zadanie 1. – badające umiejętność sporządzania wykresu i zbadania własności funkcji określonej wzorem „klamrowym”,
- zadanie 3. – badające umiejętność rozwiązania zadania tekstowego prowadzącego do układu równań liniowych.

Interesujące wydać się może zestawienie powyższych wskaźników łatwości z frakcjami opuszczeń zadań z tego arkusza – **tabela 6**. Badanie frakcji opuszczeń zostało przeprowadzone w OKE we Wrocławiu na reprezentatywnej losowej próbie około 40% prac.

Tabela 6. Frakcje opuszczeń zadań z arkusza dla poziomu podstawowego – matematyka, maj 2009

| Numer zadania | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Opuszczenia | 0,7% | 5,5% | 3% | 4,9% | 5,7% | 11,8% | 3,6% | 6,9% | 3,6% | 1,1% | 3,3% |

Najczęściej opuszczanym w arkuszu było zadanie 6. – niemal co ósmy zdający nie podjął próby jego rozwiązania. Wiąże się to jednocześnie z niską wartością wskaźnika łatwości. Z drugiej strony zadanie 1. – jedno z dwóch najłatwiejszych w tym arkuszu (obok zadania 2.) było najrzadziej opuszczane. Uwagę zwracają także rzadkie opuszczenia zadania 10. – głównie ze względu na podpunkt a) tego zadania.




Wykres 4. Wskaźniki łatwości zadań z arkusza dla poziomu rozszerzonego, egzamin maturalny z matematyki, maj 2009 r.

Większe zróżnicowanie wskaźnika łatwości można zaobserwować w arkuszu dla poziomu rozszerzonego. Oto dla zdających w naszym okręgu 3 zadania (1., 3. i 5.) były **łatwe** (wskaźniki łatwości zawarte między 0,7 i 0,89), 4 zadania (2., 6., 9. i 11.) były **umiarkowanie trudne** (wskaźniki łatwości zawarte między 0,5 i 0,69) zaś 4 zadania (4., 7., 8. i 10.) były **trudne** (wskaźniki łatwości zawarte między 0,2 i 0,49).
Najłatwiejsze w arkuszu były:

- zadanie 1. – badające umiejętności sprawdzania, czy punkt o danych współrzędnych leży na wykresie funkcji liniowej oraz zaznaczenia w układzie współrzędnych zbioru punktów opisanego podanymi warunkami,
- zadanie 5. – badające umiejętność wykazania równości dwóch liczb rzeczywistych, zapisanych w postaci potęg o wykładniku rzeczywistym,
- zadanie 3. – badające umiejętność wykorzystania definicji funkcji wykładniczej, sporządzenia wykresu funkcji wykładniczej z wartością bezwzględną i odczytywania z wykresu niektórych jej własności.

Najtrudniejszym i wyraźnie odbiegającym od pozostałych trudnych zadań w tym arkuszu było zadanie 4. – badające umiejętność zbudowania poprawnego opisu matematycznego dla problemu opisanego w treści zadania.

Podobnie jak w przypadku poziomu podstawowego proponujemy zestawienie **wykresu 4**., zawierającego wskaźniki łatwości zadań z **tabelą 7**., zawierającą dane dotyczące frakcji opuszczeń zadań z arkusza. Badanie frakcji opuszczeń zostało przeprowadzone w OKE we Wrocławiu na reprezentatywnej losowej próbie około 50% prac.

Tabela 7. Frakcje opuszczeń zadań z arkusza dla poziomu rozszerzonego – matematyka, maj 2009

| Numer zadania | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Opuszczenia | 2,3% | 4,4% | 3,2% | 3,8% | 3,7% | 12% | 5,5% | 11,1% | 3,8% | 6,4% | 2,7% |

Opuszczenia zadań nie muszą mieć ścisłego związku z wartością wskaźnika łatwości. Zadanie 4. było opuszczane niemal tak często jak najłatwiejsze w arkuszu zadanie 5. Tłumaczyć ten fakt można naturą zadania – jego treść prowokuje do rozważania rozmaitych strategii – nie istnieje tu bariera wiedzy, której posiadanie warunkowałoby powodzenie w jego rozwiązaniu. Zdający najczęściej opuszczali zadanie 6., w którym zestawiono różne umiejętności pod „jednym sztandarem" – wyznaczania dziedziny funkcji logarytmicznej. Niemal tak samo często było przez zdających opuszczane zadanie 8., być może dlatego że dotyczyło przeprowadzenia dowodu – choć kontekst, w postaci dwóch okręgów stycznych zewnętrznie i jednocześnie do ramion kąta prostego, jest czytelny – zdający miał nawet przed oczyma rysunek ilustrujący treść. Najrzadziej zdający opuszczali zadanie 1. w arkuszu – świadczy to dobrze o decyzji co do kolejności zadań. Podobnie pocieszający jest fakt, że zdający nie porzucali ostatniego zadania w arkuszu – opuszczenia zadania 11. są nieznacznie częstsze jak w przypadku zadania 1.

## 2. Co z tą trygonometrią? Słów kilka o kłopotach maturzystów

### Wstęp

Łza się w oku kręci na wspomnienie ośmioklasowej szkoły podstawowej, której piętnastoletni absolwenci podczas egzaminów wstępnych do ówczesnych szkół średnich popisywali się umiejętnościami stosowania własności funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym w różnych, bywało wyrafinowanych zadaniach.

Na egzaminie maturalnym z matematyki, w arkuszach dla obu poziomów egzaminu, od kilku lat znajdujemy przynajmniej jedno zadanie (jeden podpunkt zadania) osadzone treściowo w dziale „funkcje trygonometryczne" podstawy programowej. Nie powinno to nikogo zaskakiwać – w arkuszu egzaminacyjnym bywa od 9 do 12 zadań, zaś działów podstawy programowej jest 9.

W roku 2009 zdający egzamin na poziomie podstawowym mogli uzyskać 6 punktów (5 punktów w zadaniu 6. i 1 punkt zadaniu 11.) za umiejętności wykorzystania własności funkcji trygonometrycznych, na poziomie rozszerzonym tych punktów było także 6 (2 punkty w zadaniu 6. oraz 4 punkty w zadaniu 11.).

Kolejny raz wyniki zdających z zakresu trygonometrii nie są najwyższe. Nie miejsce, nie pora, a być może i mało to odkrywcze, aby zadawać pytanie o możliwość przesunięcia działu „funkcje trygonometryczne kąta ostrego" do gimnazjum. Czy wystarczy podawać argument następujący: im wcześniej uczniowie zetkną się z innym przykładem funkcji niż liniowa tym lepiej?

Gwoli przypomnienia, w roku ubiegłym zadania 7. i 11. z arkusza dla poziomu podstawowego, badające umiejętności stosowania własności funkcji trygonometrycznych, były dla zdających z naszego okręgu dwoma najtrudniejszymi – skuteczność ich rozwiązywania mierzona wskaźnikiem łatwości wynosiła odpowiednio 0,35 i 0,29. Rzut oka na treści obu zadań pozwala zauważyć, że swą złożonością nie odbiegają od zadań egzaminacyjnych z egzaminów wstępnych do szkół średnich w latach dziewięćdziesiątych ubiegłego stulecia.

**Matura 2008**

**Zadanie 7. (4 pkt)**

Dany jest trapez, w którym podstawy mają długość 4 cm i 10 cm oraz ramiona tworzą z dłuższą podstawą kąty o miarach 30° i 45°. Oblicz wysokość tego trapezu.

**Zadanie 11. (5 pkt)**

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego równa się $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$, gdzie a oznacza długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa. Zaznacz na poniższym rysunku kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy. Miarę tego kąta oznacz symbolem $\beta$. Oblicz $\cos\beta$ i korzystając z tablic funkcji trygonometrycznych odczytaj przybliżoną wartość $\beta$ z dokładnością do $1^\circ$.

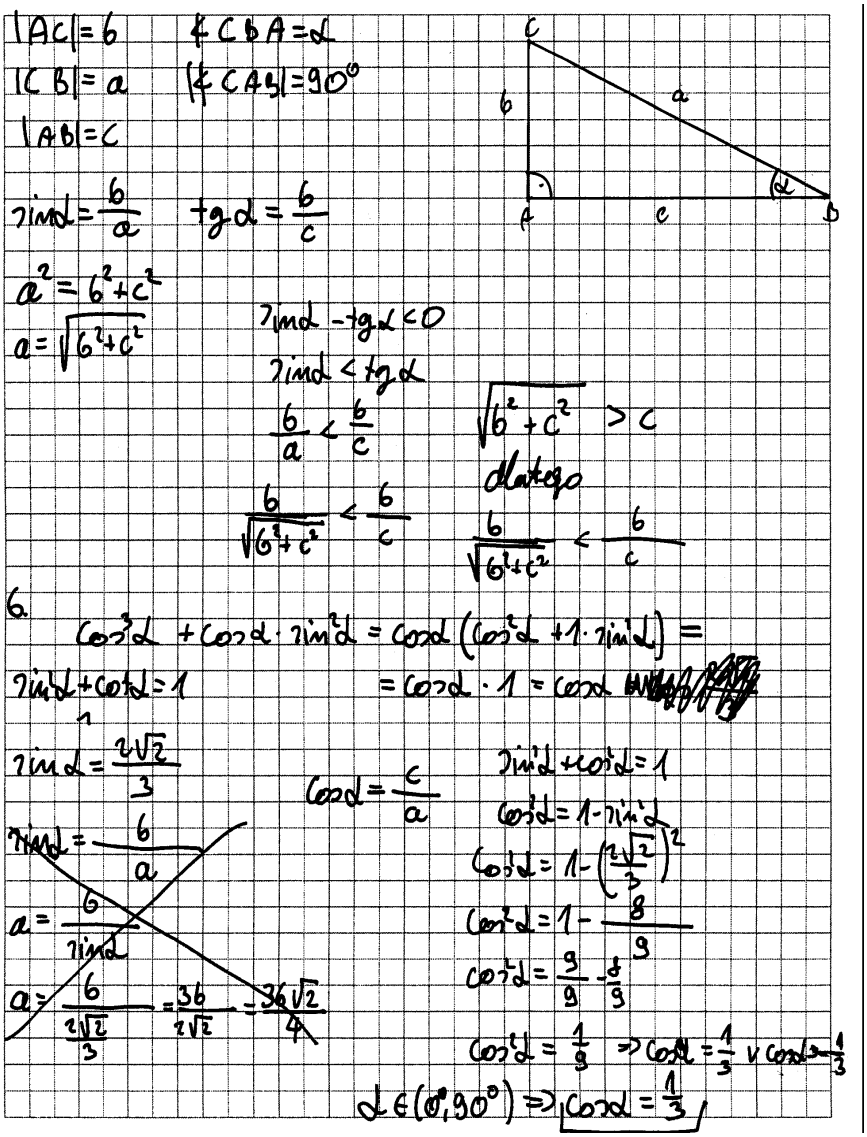
Dość powszechna jest opinia, że dla wielu zdających zadania z geometrii są trudne. Jednak od kilku lat do grona trudnych zadań dołączają zadania z trygonometrii, mimo że daje ona dużo większe możliwości algebraizacji problemów niż na przykład syntetyczna geometria. A może to właśnie możliwość algebraizacji problemu decyduje o postrzeganiu zadań z trygonometrii jako trudnych?

**Matura 2009**

Wróćmy do matury tegorocznej. Chcemy dokładniej przyjrzeć się wynikom uzyskanym przez zdających we wspomnianych czterech zadaniach. Zacznijmy od przypomnienia treści **zadania 6.** z arkusza dla poziomu podstawowego.

**Zadanie 6.** ***(5 pkt)***
Miara jednego z kątów ostrych w trójkącie prostokątnym jest równa $\alpha$.
a) Uzasadnij, że spełniona jest nierówność $\sin\alpha - \mathrm{tg}\alpha < 0$.
b) Dla $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ oblicz wartość wyrażenia $\cos^3\alpha + \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha$.

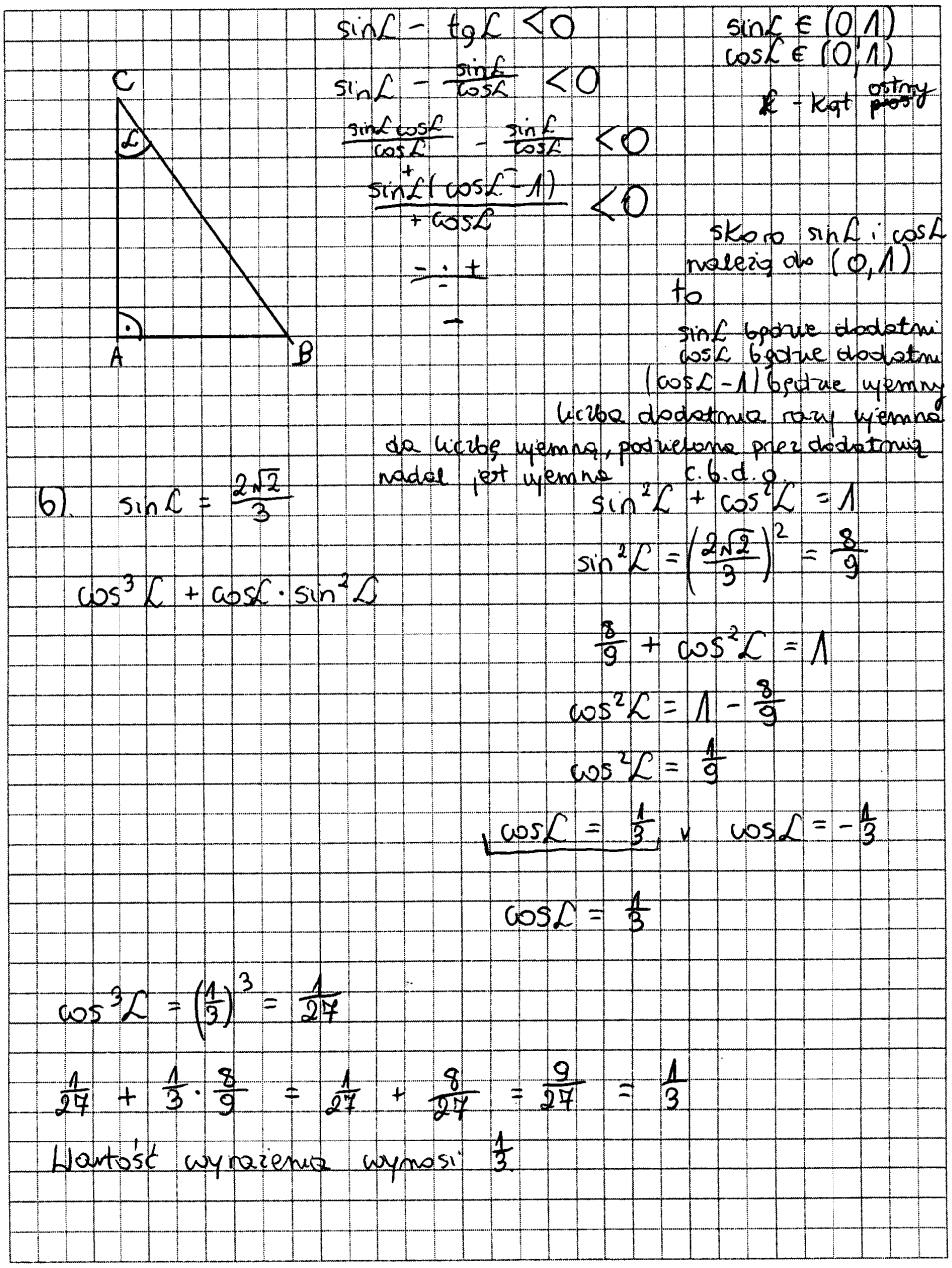
Na początek dwa przykłady oryginalnych i bezbłędnych rozwiązań zdających. Nie było ich wiele i dlatego ich obecność cieszy. Mogą służyć przykładem. Mogą pobudzać refleksje.




Gratulujemy temu zdającemu i maksymalnej punktacji w tym zadaniu i swobody i dystansu oraz ładu i porządku. Oprócz rysunku umieścił opis literowy oznaczeń, a same oznaczenia długości boków są w tej pracy inne niż tradycyjnie stosowane. Czuje się swo-

bodę w operowaniu pojęciami. Rozwiązuje kolejno podpunkty, zadając z pewnością sobie po drodze pytania w rodzaju „co wiem?” i „co muszę zrobić?” Zwracamy uwagę na zapis „wyjściowy” w podpunkcie a) $\frac{b}{a} < \frac{b}{c}$ i zaraz potem na kluczowy moment w rozwiązaniu: $\sqrt{b^2+c^2} > c$ i konkluzja, w takim razie: $\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} < \frac{b}{c}$. Nie ma tutaj beletrystyki, uprawianej przy okazji tego podpunktu przez część zdających. Modelowe jest rozwiązanie podpunktu b). Najpierw zajęcie się samym wyrażeniem, a potem konsekwentne obliczenia tego, co potrzeba – ni mniej, ni więcej.

I drugi przykład bezbłędnego rozwiązania:




Zdający inaczej „atakuje” podpunkt a). Umie odejmować ułamki, i zdaje sobie sprawę z tego, że dowód nierówności wyjściowej sprowadza się uzasadnienia, iż ułamek

$\frac{\sin\alpha(\cos\alpha-1)}{\cos\alpha}$ ma wartość ujemną dla wszystkich kątów ostrych. Argumenty na poparcie tezy konsekwentnie zbiera i zapisuje obok, czasem stosując techniki kryptograficzne. Podpunkt b) rozwiązuje w sposób charakterystyczny dla większości zdających. Końcową odpowiedź podkreśla, co w świetle uwagi zapisanej w prawym górnym rogu, jest w pełni usprawiedliwione.

Historię zmagań z tym zadaniem maturzystów w naszym okręgu obrazują poniższe dane:

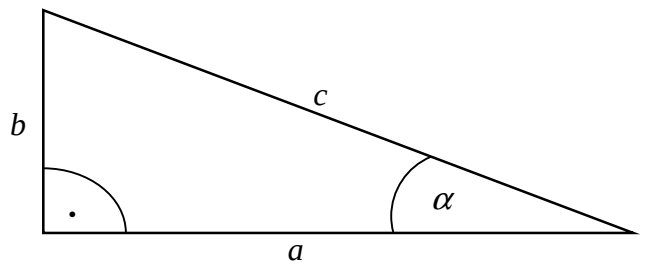
- wskaźnik łatwości zadania: 0,25 – najtrudniejsze zadanie w arkuszu,
- frakcja opuszczeń: 11,8%,
- rozkład punktów uzyskiwanych przez zdających – tabela poniżej:

| Liczba punktów za rozwiązanie zadania 6. | Procent zdających |
|---|---|
| **0** | **44,3** |
| **1** | **20,8** |
| **2** | **13,5** |
| **3** | **11,5** |
| **4** | **4,5** |
| **5** | **5,4** |

Niestety, aż 44,3% procenta zdających nie potrafiło zdobyć choćby jednego punktu za rozwiązanie tego zadania. Ponadto, zadanie 6. było najczęściej opuszczane w arkuszu dla poziomu podstawowego – niemal co ósmy zdający maturę w naszym okręgu (11,8%) oddał „bez walki" 5 punktów egzaminacyjnych. Zostawił, po prostu, puste miejsce po treścią zadania. Oznacza to zatem, że 32,5% zdających rozpoczęło rozwiązywanie tego zadania, lecz zabrakło Im umiejętności do zdobycia choćby jednego punktu w tym zadaniu. Z drugiej strony, jedynie co dwudziesty maturzysta (5,4%) uzyskał maksymalną punktację za swoje rozwiązanie.

Zdajemy sobie sprawę, że podpunkt a) tego zadania mógł usztywnić zdających – jak każdy moment w zadaniu, kiedy stykają się z poleceniem zaczynającym się od słów „wykaż, że …", „uzasadnij, że …", czy „udowodnij, że …". Powie ktoś, że przecież idzie tu o porównanie dwóch liczb dodatnich zapisanych w postaci ułamków zwykłych. Cóż miał jednak poradzić zdający, który rozpoczął rozwiązywanie tego podpunktu od zapisania nierówności w postaci $\sin\alpha-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}<0$? Pewnie po raz pierwszy i do tego na egzaminie napotkał na swej drodze konieczność analizy takiej sytuacji i dobrania sposobu argumentacji. Potrzeba zimnej krwi i dystansu, aby zobaczyć tutaj możliwość przejścia do postaci $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot(\cos\alpha-1)<0$, czy wręcz $\mathrm{tg}\alpha\cdot(\cos\alpha-1)<0$, więcej nawet, aby w ogóle zauważyć możliwość analizy znaków obu czynników i całego iloczynu.

Czy w podobnej sytuacji byli zdający, którzy sporządzali rysunek, na przykład taki jak poniżej,




wprowadzali standardowe oznaczenia, po czym zapisywali nierówność $\sin\alpha - \mathrm{tg}\alpha < 0$ w postaci $\frac{b}{c} - \frac{b}{a} < 0$ i często na tym kończyli swoje rozwiązanie? Tutaj przecież kontekst był jasny – wystarczy umieć porównać dwa ułamki zwykłe. Czy trudne było zapisanie nierówności $\frac{b}{c} - \frac{b}{a} < 0$ w postaci $\frac{b}{c} < \frac{b}{a}$? I dodanie, że ta nierówność zawsze zachodzi, ponieważ mając dwie liczby dodatnie zapisane w postaci ułamków zwykłych o tym samym liczniku łatwo wskazać większą z nich – będzie to ten ułamek, którego mianownik jest mniejszy. Czy zdający mieli tego świadomość? Czy uzasadnianie, argumentowanie w matematyce to „wiedza tajemna", dostępna nielicznym? **A może zbyt rzadko decydujemy się na zadanie pytanie „dlaczego tak jest?" Jeżeli matematyka to język, to może należy docenić wartość dobrej konwersacji – podobnie jak na języku obcym!**

Dodajmy, że istnieje dość liczna grupa maturzystów, którzy w tym zadaniu przez miarę $\alpha$ dowolnego kąta ostrego rozumieli wybranie jednej, dwóch a czasem nawet (!) trzech wartości, najlepiej: $\alpha = 30°$, $\alpha = 45°$, $\alpha = 60°$ i sprawdzenie, że każda z liczb: $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$, $\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}$ jest ujemna. Było też kilka prac, w których zdający usiłowali nas przekonać, że cyt. „Nierówność jest prawdziwa dla każdego kąta ostrego. Wystarczy w tym celu otworzyć zestaw wybranych wzorów matematycznych i na przedostatniej stronie przejrzeć tablice funkcji trygonometrycznych". Niestety ten wybieg nie przyniósł punktu, ponieważ wspomniane tablice są tylko czterocyfrowe i z tego powodu nierówność $\sin\alpha - \mathrm{tg}\alpha < 0$ nie zachodzi dla $\alpha = 0°$, a także dla $\alpha = 1°$. Prosimy zauważyć ponadto, że o ciągłości obu funkcji w ogóle w tym momencie nie wspominamy.

A zatem, powtórzmy jeszcze raz: trzy pierwsze punkty w tym zadaniu, to uzasadnienie nierówności, zaś dwa pozostałe to obliczenie wartości nieskomplikowanego wyrażenia trygonometrycznego $\cos^3\alpha + \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha$, przy danym $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Bardzo niewielu zdających zauważało, jak pewnie życzyłby sobie tego autor zadania, że dane wyrażenie można zapisać z zastosowaniem prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania oraz „jedynki trygonometrycznej" następująco:

$$\cos^3\alpha + \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha = \cos\alpha\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) = \cos\alpha$$

co oznacza, że wystarczyło jeszcze obliczyć $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, aby zdobyć dwa ostatnie punkty w tym zadaniu. To zauważenie oczywiście nie było konieczne. Najczęściej zdający obliczali najpierw cosinus kąta i wstawiali jego wartość oraz daną wartość sinusa. Potem potrzebowali jeszcze tylko poprawnych rachunków na liczbach rzeczywistych

$\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2$, aby dotrzeć do końcowej odpowiedzi. Zdający sam przenosił akcent rozwiązania na umiejętności wykonywania obliczeń. Z poprawnością obliczeń było już różnie. Pół biedy, jeżeli w ogóle była zauważona konieczność obliczenia cosinusa kąta z danej wartości sinusa tego samego kąta. Sporej grupie zdających nie przeszkadzało pozostawić swoje rozwiązania w postaci: $\cos^3\alpha+\cos\alpha\cdot\frac{8}{9}$ lub nawet

$\cos^3\alpha+\cos\alpha\cdot\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2\alpha=\cos^3\alpha+\cos\alpha\cdot\frac{8}{9}\alpha=\cos\alpha\left(\cos^2\alpha+\frac{8}{9}\alpha\right)$ (sic!) – mimo polecenia „oblicz", sugerującego, że wynik końcowy jednak powinien być liczbą. „Lekkość" w traktowaniu argumentu funkcji jest niemal poetycka. **Jak daleko do chwili, w której zdający potraktują na przykład wyrażenie „$\cos 2\alpha$" jako iloczyn 3 wyrażeń algebraicznych?**

**A może zawczasu my powinniśmy zapisywać argumenty funkcji trygonometrycznych w nawiasach**?

Tak samo mocno zabolało nas pomijanie argumentu i oglądanie zapisów typu:

$\sin^2+\cos^2=1$

$\frac{8}{9}+\cos^2=1$

$\cos^2=\frac{1}{9}\Rightarrow\cos=\frac{1}{3}$

**Czy to już są funkcje, czy może wciąż wyrażenia algebraiczne?**

W rozwiązaniach tego podpunktu ujawniały się kłopoty zdających z działaniami na wyrażeniach algebraicznych, na przykład z umiejętnością rozkładu wyrażenia na czynniki. Stąd błędne zapisy typu:

- $\cos^3\alpha+\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha=\cos^2\alpha\cdot\cos\alpha+\cos\cdot\left(1-\cos^2\alpha\right)=\cos^2\alpha\left(\cos\alpha+\cos\alpha-1\right)$
- $\cos^3\alpha+\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha=\cos\alpha\left(\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha\right)$
- $\cos^3\alpha+\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha=\cos\alpha\left(\cos^2\alpha+1\right)\cdot 1-\cos^2\alpha$
- $\cos^3\alpha+\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha=\cos\alpha\left(1-\sin^2\alpha+1\right)\cdot\sin^2\alpha=\cos\alpha\cdot\sin^4\alpha=$ $\sqrt{1-\sin^2\alpha}\cdot\sin^4\alpha=1-\sqrt{\sin^2\alpha}$

Rozumiemy teraz, dlaczego rozkładanie wielomianu na czynniki sprawia uczniom problem.

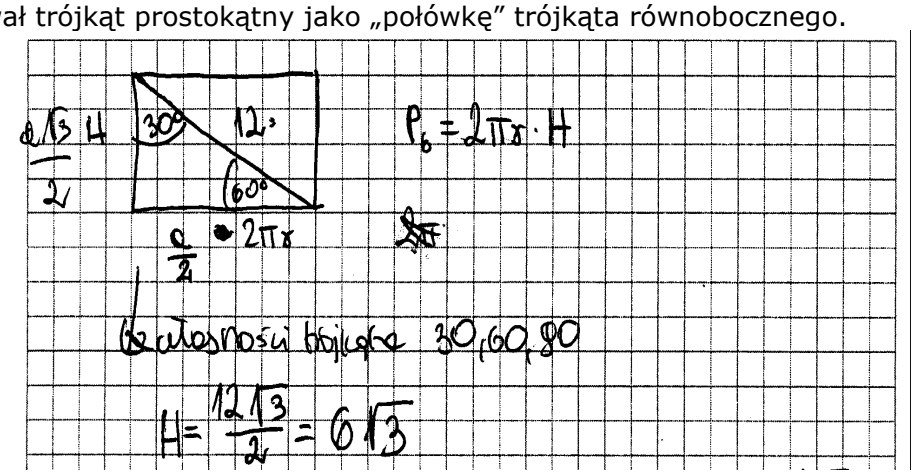
I jeszcze jeden wątek. Tym razem związany z wglądami do prac egzaminacyjnych. Aż chce się zacytować powiedzenie Antoniego Słonimskiego: **„tonący brzydko się chwyta"** dla opisania postępowania niektórych zdających, próbujących na wglądzie udowodnić, że zostali skrzywdzeni przez egzaminatorów. W odniesieniu do zadania 6. takie sytuacje również miały miejsce. Przykład: zdający sporządził rysunek trójkąta prostokątnego o bokach: 1, 2, 3 (sic!), oznaczył jeden z kątów ostrych, po czym w podpunkcie a) zadania uzasadnia, że cyt. „korzysta z definicji funkcji trygonometrycznych" i zapisuje cyt. „$\frac{2}{3}-\frac{2}{1}<0\Rightarrow\frac{2}{3}-\frac{6}{3}<0\Rightarrow-\frac{4}{3}<0$", co według Niego oznacza, że cyt. „Nierówność $\sin\alpha-\mathrm{tg}\alpha<0$ jest spełniona". Udostępniany wszystkim wglądającym „klucz punktowania

odpowiedzi” temu zdającemu sprawy nie wyjaśnił – jednak wniósł pisemne zastrzeżenie od oceny tego zadania.

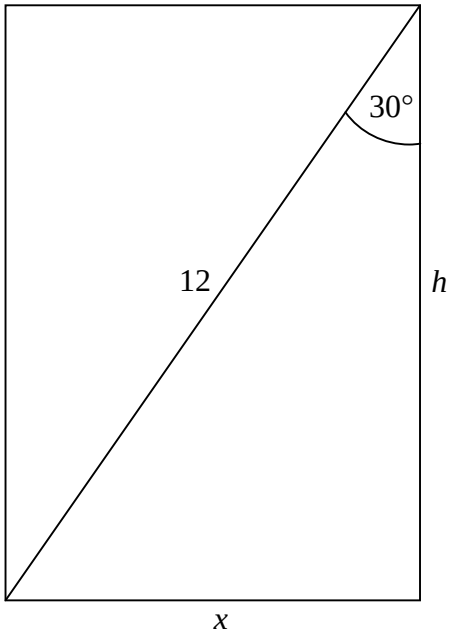
**Zadanie 11. – arkusz dla poziomu podstawowego**

**Zadanie 11.** ***(5 pkt)***
Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu na płaszczyznę jest prostokątem. Przekątna tego prostokąta ma długość $12$ i tworzy z bokiem, którego długość jest równa wysokości walca, kąt o mierze $30°$.
a) Oblicz pole powierzchni bocznej tego walca.
b) Sprawdź, czy objętość tego walca jest większa od $18\sqrt{3}$. Odpowiedź uzasadnij.

Ostatnie zadanie w arkuszu dla poziomu podstawowego dawało tylko jedną (niewielką) okazję do zaprezentowania umiejętności stosowania definicji funkcji trygonometrycznych. Zdający musieli obliczyć długości boków (długość boku) prostokąta stanowiącego rozwinięcie powierzchni bocznej walca. Dodajmy, że nierzadko omijali same definicje funkcji trygonometrycznych i odwoływali się do własności niektórych trójkątów, tzw. ekierek. Popatrzmy zresztą na fragment oryginalnego rozwiązania. Ten zdający zinterpretował trójkąt prostokątny jako „połówkę” trójkąta równobocznego.




Niektórzy zdający zauważali też, że przekątna prostokąta podzieliła go na dwa trójkąty, z których można złożyć jeden – równoboczny. Tak więc cała trygonometria w tym zadaniu sprowadzała się do własności niektórych trójkątów prostokątnych. Zdający, którzy nie odnosili się do własności wspomnianych trójkątów musieli skorzystać z definicji funkcji trygonometrycznych. I pewnie Państwo się domyślają, że błędy zdających wynikały z nieznajomości definicji tych funkcji. **Czy naprawdę wystarczy obrócić trójkąt prostokątny na przykład o 90 stopni, aby zaburzyć u niektórych uczniów rozumienie sinusa czy cosinusa kąta ostrego?**




Czasem pewnie tak, bo przy oznaczeniach jak na powyższym rysunku, zdarzały się następujące błędne zapisy: $\frac{12}{h}=\sqrt{3}$ albo $\frac{12}{h}=\mathrm{tg}30^\circ$ albo $\cos 30^\circ=\frac{x}{12}$ albo $\frac{h}{12}=\sin 30^\circ$ albo $\mathrm{tg}30^\circ=\frac{x}{12}$ czy też $12=\frac{h\sqrt{3}}{2}$. Natknęliśmy się także na taki oto wzór: $P_\Delta=\frac{1}{2}\cdot 12^2\cdot\frac{\sin 30^\circ\cdot\sin 60^\circ}{\sin 90^\circ}$ (?).

Jaka szkoda, że ci zdający nie zajrzeli na stronę 12. zestawu wzorów – zamieszczone tam definicje wraz z ilustracją geometryczną może pomogłyby uniknąć tych błędów. Wskaźnik łatwości pierwszej czynności w zadaniu 11. wyniósł 0,77, a jeżeli weźmiemy pod uwagę fakt, że 3,3% zdających nie podjęło próby rozwiązania tego zadania, to okazuje się, że niemal 20% maturzystów popełnia błędy w obliczaniu długości boków trójkąta prostokątnego. Samo wnioskowanie o poziomie opanowania definicji funkcji trygonometrycznych na podstawie wyników tego zadania może być utrudnione.

Dla oceniania ważniejsze w tym zadaniu były dwie kwestie:

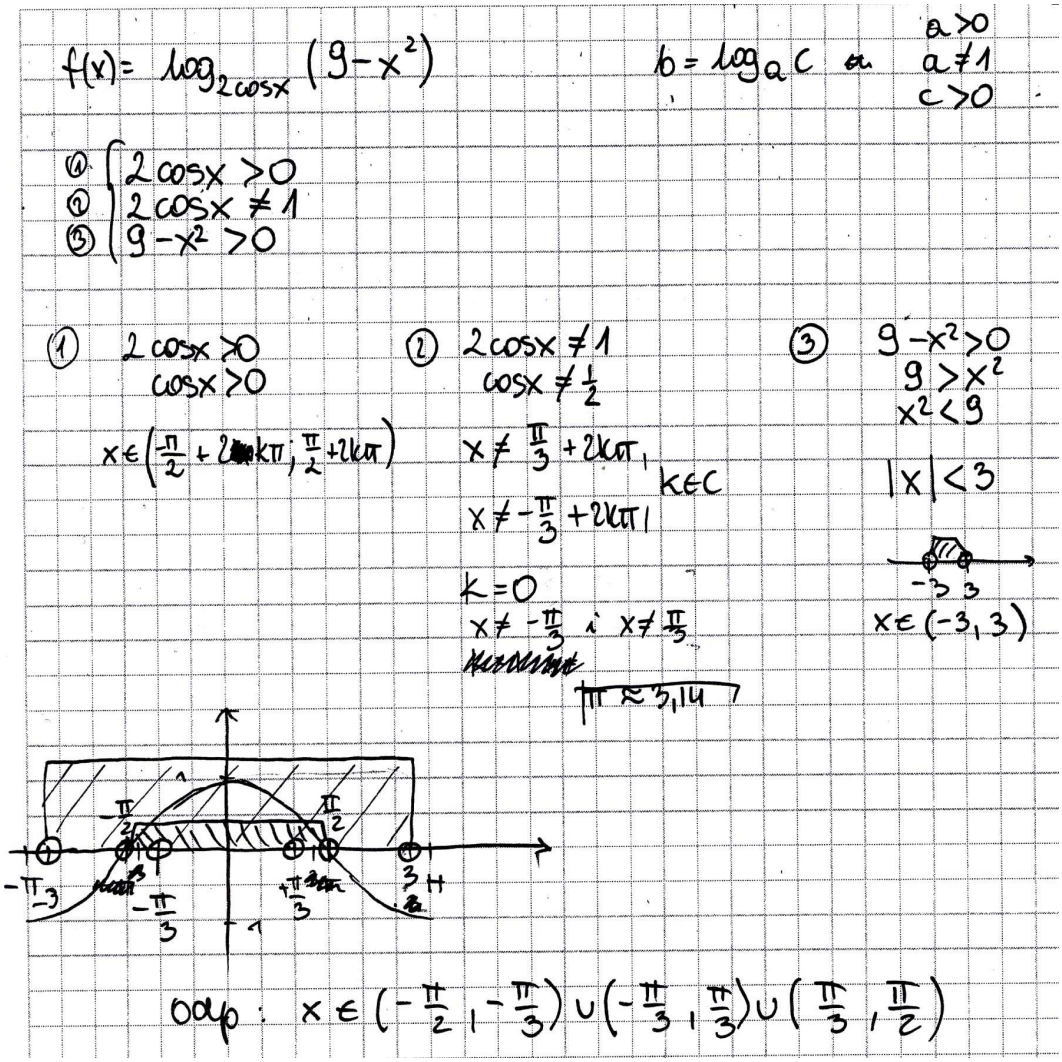
- poprawna interpretacja położenia kąta, o którym mowa w treści zadania,
- zapisy zdającego mogące świadczyć o interpretacji prostokąta będącego rozwinięciem powierzchni bocznej walca jako przekroju osiowego walca.

**Zadanie 6. – arkusz dla poziomu rozszerzonego**

**Zadanie 6.** ***(5 pkt)***
Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x)=\log_{2\cos x}\left(9-x^2\right)$ i zapisz ją w postaci sumy przedziałów liczbowych.

Jak widać, zadanie jest zanurzone częściowo w trygonometrii. Stąd, niestety, jest jakaś szansa na to, że właśnie sztuczny kontekst funkcji logarytmicznej – dość złożonej – spowodował, że aż 12% maturzystów w naszym okręgu opuściło to zadanie. Było najczę-

ściej opuszczanym zadaniem w tym arkuszu. Bezbłędnych rozwiązań było 20,8%. Oto jedno z nich:




Skuteczność zdających, zmierzona wskaźnikiem łatwości całego zadania, to jednak tylko 0,51. Dokładna analiza czynności, które dotyczą jedynie trygonometrii w tym zadaniu, czyli zapisu zbioru rozwiązań nierówności $\cos x > 0$, a następnie nierówności $\cos x \neq \frac{1}{2}$, ujawnia jeszcze niższe wartości wskaźnika łatwości, odpowiednio 0,47 i 0,38.

A **zatem kłopot zdających polegał tym razem na poprawnym posługiwaniu się wykresem funkcji cosinus, w szczególności na operowaniu okresem tej funkcji.** Do rzadkości niestety należały prace, w których zdający zauważali, że ze względu na liczbę logarytmowaną, wystarczy ograniczyć rozważania o dziedzinie funkcji do przedziału $(-3, 3)$. Dodajmy, że 21,2% zdających nie zdobyło nawet jednego punktu za rozwiązanie, zaś poprawną końcową odpowiedź udzieliło 20,8% zdających.

Nie zapominajmy o tym, że zdający mają do dyspozycji zestaw wybranych wzorów matematycznych, a w nim, już na stronie 4., definicję logarytmu, zaś na stronie 12. wykresy czterech funkcji trygonometrycznych. Czy zdający pamiętali o tym, czy może zaufali swojej pamięci i wiedzy – wątłej, a może nieutrwalonej? Stąd błędy, niestety wcale nierzadkie, w zapisywaniu zbiorów rozwiązań nierówności trygonometrycznych.

Listę najczęściej popełnianych błędów zamieszczamy poniżej:

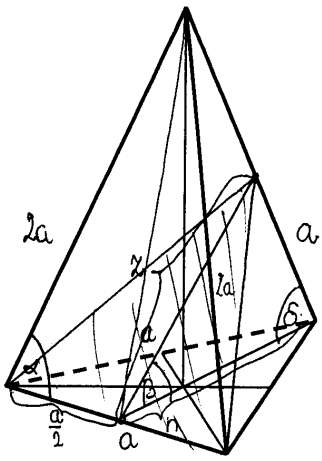
- $\cos x > 0 \Rightarrow x \in \left(-2\pi + 2k\pi, -\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)$
- $\cos x > 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right) \cdot k\pi$
- $\cos x > 0 \Rightarrow x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right\rangle$
- $\cos x > 0 \Rightarrow x > \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
- $\cos x > 0 \Rightarrow x > 0$
- $\cos x > 0 \Rightarrow x \in (0, k\pi) - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$
- $\cos x > 0 \Rightarrow x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right) \cup 2k\pi$
- $\cos x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ i $x \neq \frac{\pi}{6} + 2k\pi$
- $\cos x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow x \neq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ i $x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$
- $\cos x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow x \in R - \left\{\frac{\pi}{3} \cdot 2k\pi\right\}$
- $\cos x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in N$
- $\cos x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow x \neq k \cdot \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3}$
- $\cos x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}k\pi$
- $\cos x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ i $x \neq -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$
- $\cos x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow x \neq -\frac{\pi}{6}$ i $x \neq \frac{\pi}{6}$

Pojawiały się także zapisy formalnie niepoprawne, wynikające z chęci zapisu zbioru rozwiązań nierówności trygonometrycznej na całej osi liczbowej, przy jednoczesnym braku symbolu sumy uogólnionej, na przykład $\cos x > 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi$ lub $\cos x > 0 \Rightarrow x \in 2k\pi \cup \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. Poważnym błędem trzeba jednak nazwać zapis typu: $\cos x > 0 \Rightarrow x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. Pojawiały się także prace, w których zdający w ogóle nie stosowali miary łukowej kąta (np. $\cos x > 0 \Rightarrow x < 90°$).

**Zadanie 11. – arkusz dla poziomu rozszerzonego**

**Zadanie 11.** ***(6 pkt)***
Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, w którym krawędź podstawy ma długość $a$ i krawędź boczna jest od niej dwa razy dłuższa. Oblicz cosinus kąta między krawędzią boczną i krawędzią podstawy. Narysuj przekrój ostrosłupa płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i środek przeciwległej krawędzi bocznej i oblicz pole tego przekroju.

I ostatnie już zadanie, w którym można było obserwować umiejętności stosowania pojęć i twierdzeń trygonometrii i geometrii. Zadanie chętnie rozwiązywane przez zdających, mimo że znajdowało się na końcu arkusza. Tylko 2,7% zdających w naszym okręgu nie podjęło jego rozwiązania. Jaka była jakość tych rozwiązań, szczególnie tej części rozwiązania, która dotyczyła trygonometrii? Część rozwiązań (27,3%) jest znakomita i bezbłędna, jak w przykładzie poniższym. Prezentowane rozwiązanie jest czytelne, zaplanowane z wyczuciem estetyki, elementy logicznie uporządkowane. Niektórzy zdający wykorzystywali mniej niż połowę miejsca przeznaczonego na rozwiązanie.




$$\cos\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{2a} = \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2a} = \frac{1}{4}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\delta = \frac{\frac{2}{3}h}{2a} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$x^2 = h^2 + a^2 - 2h\cdot a\cdot\cos\delta$$

$$x^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + a^2 - 2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$x^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{4a^2}{4} - a^2\frac{3}{6}$$

$$x^2 = \frac{7a^2}{4} - \frac{2a^2}{6}$$

$$x = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

$$P = \frac{1}{2}\cdot a\cdot x = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}a = \frac{\sqrt{5}a^2}{4}$$

Ile punktów w tym zadaniu można było zdobyć za umiejętności operowania trygonometrią? Na pewno jeden (pierwszy punkt) – za obliczenie cosinusa kąta między krawędzią boczną i krawędzią podstawy. Wskaźnik łatwości tej czynności wyniósł 0,7 – co

oznacza, że ta czynność była łatwa dla zdających. Z drugiej strony, idzie tu jednak o nieskomplikowaną umiejętność stosowania definicji cosinusa kąta ostrego w trójkącie prostokątnym przez zdających, którzy wybrali poziom rozszerzony. Co więc należy sądzić o umiejętnościach pozostałych 27,3% zdających? (30% – 2,7% tych, którzy zadanie opuścili)? Odpowiedź podsuwają błędy popełnione przez zdających. Błędy w realizacji tej czynności można podzielić na dwie grupy:

1. błędy zdających, którzy poprawnie zinterpretowali szukany kąt,
2. błędy zdających, którzy obliczali cosinus innego kąta, a mianowicie kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.

Pewnie trudno w to uwierzyć, ale zdający z pierwszej wyróżnionej grupy zapisywali cosinus szukanego kąta w „najprostszy" sposób: $\cos\alpha = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$, niektórzy z nich „popisywali" się w dodatku znajomością miary kąta i pisali cyt. „stąd wynika, że $\alpha = 60°$". Nie przeszkadzało Im wcale, że trójkąt, w którym prowadzili obliczenia nie jest prostokątny. Więcej nawet, otrzymany wynik nie wzbudził w Nich żadnych podejrzeń - oto trójkąt równoramienny o bokach długości $a$, $2a$, $2a$ ma jeden kąt przy podstawie równy $60°$ (!?). Osobną rzeczą są błędy rachunkowe, które jednak można popełnić przy skracaniu tego ułamka. Oto przykłady takich błędów:

- $\cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}a}{2a} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}a^2$
- $\cos\alpha = \frac{1}{2}a : 2a = 1$
- $\cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}a}{2a} = \frac{1}{4a}$
- $\cos\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{2a} = a^2$
- $\cos\alpha = \frac{a}{2a} = a \cdot \frac{1}{2a} = \frac{1}{2}$, czy nawet tak:
- $\cos\alpha = \frac{2a}{\frac{1}{2}a} = 4a^2$
- $\cos\alpha = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2$ - tutaj błędu w skracaniu nie ma, za to jest kłopot z podwajaniem (no i definicją)

Jak można się domyślić, wiele może zależeć od **położenia i rozmiarów kreski ułamkowej**! W jednej z prac znajdujemy i takie stwierdzenie: „$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}a}{2a}$, więc dla $a = 1$, $\cos\alpha = \frac{1}{4}$".

**Powstaje zatem podejrzenie, że zdający mają kłopot z rozumieniem ilorazu dwóch wielkości. To przypuszczenie zdają się potwierdzać błędy zdających oraz Ich wyniki w zadaniu 8., gdzie, w szczególności, wskaźnik łatwości równa się tylko 0,43, zaś wszystkie 4 punkty za jego rozwiązanie uzyskało 35% maturzystów.**

Zdający, z drugiej grupy, źle zinterpretowali omawiany w zadaniu kąt i błądzili poszukując odpowiedzi na pytanie, jaką część wysokości podstawy zajmuje rzut krawędzi bocznej na płaszczyznę podstawy ostrosłupa. Oto przykłady takich błędów:

- $\cos\alpha = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$
- $\cos\alpha = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$
- $\cos\alpha = \dfrac{\frac{a\sqrt{13}}{6}}{2a} = \dfrac{\sqrt{13}}{12}$

Trudno jednoznacznie opisać poziom opanowania umiejętności stosowania trygonometrii w kolejnych fazach rozwiązania, ponieważ zdający stosowali głównie dwa sposoby rozwiązania:

- albo przez zastosowanie twierdzenia cosinusów, zapisywanego dla trójkąta w ścianie bocznej, lub też, jak w przykładzie powyższym, w trójkącie o bokach $a$, $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $z$, gdzie $z$ oznacza wysokość trójkąta, będącego przekrojem ostrosłupa,
- albo przez zrzutowanie środka krawędzi bocznej na wysokość podstawy ostrosłupa i zastosowanie twierdzenie Pitagorasa do dalszych obliczeń.

Możemy jedynie stwierdzić, że skuteczność zdających w tej fazie rozwiązania zadania nie jest najwyższa i oscyluje w pobliżu 40%.

## 3. Zamiast podsumowania

1) Prezentacja wyników i błędów popełnionych przez tegorocznych maturzystów w zadaniach dotyczących trygonometrii miała na celu zwrócenie uwagi nauczycieli matematyki na systematycznie pogarszające się wyniki w tej dziedzinie na egzaminie maturalnym, w tym także na opuszczenia takich zadań. Obowiązkowa matura z matematyki od 2010 roku, to pisemny egzamin, w trakcie którego zdający w ciągu 170 minut będzie rozwiązywał trzydzieści kilka zadań (najwięcej zamkniętych, kilka krótkiej i rozszerzonej odpowiedzi). Ponieważ podstawa programowa matematyki jest podzielona na 10 działów, można zatem oczekiwać, że trzy lub cztery zadania będą dotyczyć trygonometrii. Niepodejmowanie takich zadań może oznaczać stratę nawet kilkunastu procent punktów na świadectwie.
2) Mamy nadzieję, że przykładowe błędy, licznie zaprezentowane powyżej, pomogą w ustaleniu źródeł ich pojawiania się, natomiast przykłady bezbłędnych rozwiązań zdających pomogą uwierzyć następnym rocznikom maturzystów, że dobry wynik na

maturze z matematyki jest w zasięgu ręki, o ile przygotowania do matury będą przebiegać porządnie, planowo, z refleksją i dystansem do własnych umiejętności.

3) Od prawie dwóch lat powtarzamy, że w przypadku arkuszy egzaminu maturalnego z matematyki sytuacja jest przejrzysta: począwszy od 2010 roku każdy maturzysta, który uzyskał wysoki wynik na maturze z matematyki, z pewnością wykazał się umiejętnościami **modelowania, strategii i rozumowania**. I to już na poziomie podstawowym. Taka jest konstrukcja przykładowych arkuszy egzaminacyjnych zamieszczonych w Informatorze, taka jest konsekwencja wprowadzenia struktury (a nawet hierarchii) standardów wymagań egzaminacyjnych z matematyki. Jednocześnie należy zwrócić uwagę na to, że zdecydowana większość zadań w opublikowanych arkuszach bada umiejętności używania prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych. Zatem ukłon i prośba do nauczycieli o właściwe rozłożenie akcentów, o pracę „organiczną": bazę dla egzaminacyjnego sukcesu musi stanowić zrozumienie podstawowych pojęć oraz ich stosowanie w rozmaitych sytuacjach (typowych oraz mniej typowych). Odczarujmy także trygonometrię!
4) Do miana marzenia urasta myśl o sukcesach zdających egzamin maturalny z matematyki w zadaniach z geometrii. Może warto kolejny raz zaapelować o odczytywanie na nowo podstawy programowej matematyki oraz o uwzględnianie w planach nauczania faktu, że 4 z 10 działów podstawy to geometria (syntetyczna, na płaszczyźnie kartezjańskiej i stereometria) i powiązana z nią trygonometria. Czy istnieją wdzięczniejsze dziedziny szkolnej matematyki, w obszarze których można uprawiać rozumowania i strategie?