Komentarze do wyników egzaminu maturalnego z matematyki w województwach opolskim i dolnośląskim w 2008 roku

Poniższy materiał stanowi uzupełnienie ogólnokrajowego raportu zatytułowanego „Osiągnięcia maturzystów w roku 2008, komentarz do zadań z przedmiotów matematyczno-przyrodniczych" ogłoszonego 29 czerwca br. i dostępnego na stronie internetowej Centralnej Komisji Egzaminacyjnej (www.cke.du.pl). W tym raporcie, w części poświęconej wynikom matury z matematyki (strony 255-288), przedstawiono omówienie wyników wszystkich zadań z arkuszy na obu poziomach egzaminu w następującym układzie: treść zadania - sprawdzane umiejętności - rozwiązywalność zadania - najczęściej powtarzające się błędy - komentarz.

Sprawozdanie przygotowane w Okręgowej Komisji Egzaminacyjnej we Wrocławiu zawiera, w szczególności, różnorodne statystyki wyników matury z matematyki przeprowadzonej w województwach opolskim i dolnośląskim. Proponujemy zatem kilka refleksji, które mogą stanowić przyczynek do analizy jakościowej wyników zdających w każdej szkole. Chcemy mianowicie zestawić i przyjrzeć się kartotekom obu arkuszy egzaminacyjnych, ujawnić frakcje opuszczeń zadań w arkuszach, a także zilustrować przykładami charakterystyczne błędy popełnione przez zdających w zdaniach sprawdzających opanowanie umiejętności opisanych przez III. standard wymagań egzaminacyjnych (tworzenie informacji).

1. Kartoteki obu arkuszy

Arkusz dla poziomu podstawowego

Numer zadania - maksymalna liczba punktów za zadanie	Badana umiejętność *Zdający*:	Standard	Nr treści ze standardu I	Liczba punktów
1 *4 pkt*	odczytuje informacje ilościowe z wykresu	II.2)b)	2)a)	2
	wyznacza równanie prostej	I.7)a)	7)a)	1
	oblicza długość odcinka	I.7)b)	7)b)	1
2 *4 pkt*	stosuje podany wzór do rozwiązania problemu matematycznego	II.1)a)	1)d), 1)c)	1
	uzasadnia wniosek na podstawie podanego wzoru	III.2)b)	1)d), 1)c)	1
	podaje opis matematyczny danej sytuacji w postaci równania i wykorzystuje go do rozwiązania problemu	III 1)a)	3)b)	2
3 *4 pkt*	posługuje się twierdzeniami dotyczącymi działań na potęgach	II.2)a)	1)e)	3
	rozwiązuje równanie liniowe	II.2)a)	3)a)	1
4 *3 pkt*	wykonuje obliczenia procentowe	II.2)a)	1)j)	1
	zapisuje w postaci równania zależności między wielkościami	III.1)a)	1)j)	1
	rozwiązuje równanie liniowe	II.2)a)	3)a)	1
5 *5 pkt*	oblicza, ile wyrazów ciągu liczbowego określonego wzorem spełnia podany warunek	II.2)a)	3)h), 1)c)	2
	oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym	I.5)a)	5)a)	1
	wyznacza ciąg arytmetyczny na podstawie wskazanych danych	II.2)a)	5)b), 3)a)	2
6 *5 pkt*	oblicza współrzędne punktów leżących na danej prostej	I.3)a)	3)a)	2

	podaje opis matematyczny sytuacji opisanej w zadaniu w postaci równania	III.1)a)	3)a)	1
	analizuje i interpretuje otrzymane wyniki	III.2)a)	7)b)	2
7 *4 pkt*	wykorzystuje związki między bokami i kątami w trójkącie prostokątnym do rozwiązania problemu lub stosuje funkcje trygonometryczne	II.2)a)	4)a) i 6)b)	2
	podaje opis matematyczny danej sytuacji w postaci równania liniowego	III 1)a)	3)a)	1
	rozwiązuje równanie liniowe	II.2)a)	3)a)	1
8 *4 pkt*	sprawdza, czy punkt leży na wykresie funkcji	I.2)a)	2)a)	2
	rozkłada wielomian na czynniki	II.2)a)	3)d)	2
9 *5 pkt*	wykorzystuje własności funkcji kwadratowej do wyznaczenia najmniejszej i największej wartości funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym	II2)a)	3)b)	5
10 *3 pkt*	wyznacza wzór funkcji o zadanych własnościach	II.2)a)	3)f)	1
	odczytuje informacje ilościowe i jakościowe z wykresu funkcji	II.2)b)	3)f)	2
11 *5 pkt*	zaznacza kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy	I.8)b)	8)b)	1
	podaje opis matematyczny danej sytuacji w postaci równania	III.1)a)	8)c)	1
	przetwarza informacje przedstawione w postaci równania w inną postać ułatwiającą rozwiązanie problemu	III.1)c)	8)c) 4)a)	2
	odczytuje kąt, znając wartość funkcji trygonometrycznej tego kąta	II.2)a)	4)a	1
12 *4 pkt*	dobiera model matematyczny doświadczenia losowego i oblicza prawdopodobieństwo zdarzenia losowego	II.2)a)	9)a) 9)b)	4

Nietrudno obliczyć, że najwięcej punktów (31) maturzyści mogli uzyskać za wykazanie się umiejętnościami opisanymi II. standardem wymagań egzaminacyjnych (korzystanie z informacji), 11 punktów za umiejętności opisane III. standardem (tworzenie informacji) i 8 punktów za umiejętności z obszaru I. standardu (wiadomości i rozumienie).

Zauważmy ponadto (kolumna – treści ze standardu I.), że 11 zadań z tego arkusza badało opanowanie treści wszystkich 9 działów podstawy programowej matematyki.

Arkusz dla poziomu rozszerzonego

Numer zadania - maksymalna liczba punktów za zadanie	Badana umiejętność *Zdający*:	Standard	Nr treści ze standardu I	Liczba punktów
1 *4 pkt*	interpretuje treść zadania, formułuje i uzasadnia wnioski	III.2)a)b)	3)c)	4
2 *4 pkt*	rozwiązuje nierówność liniową z wartością bezwzględną	II.2)a)	1)b)R	4
3 *5 pkt*	podaje opis matematyczny danej sytuacji problemowej w postaci układu równań	III.1)a)	3)a)R	1
	rozwiązuje algebraicznie układ równań z dwiema niewiadomymi, w którym jedno równanie jest stopnia drugiego	II.2)a)	3)c)R	4
4 *4 pkt*	stosuje znane zależności do rozwiązania problemu matematycznego	II.2)a)	4)b)	1
	rozwiązuje równanie trygonometryczne	II.2)a)	5)b)R	3
5 *5 pkt*	dobiera odpowiedni algorytm do sytuacji problemowej	III.1)b)	3)f)	2

	formułuje i uzasadnia wnioski oraz opisuje je w sposób czytelny i poprawny językowo	III.2)b)	3)h)	3
6 *3 pkt*	przeprowadza dowód twierdzenia	III.2)R	5)b)	3
7 *4 pkt*	posługuje się definicją odległości dwóch punktów	II.2)a)	7)b)	3
	zapisuje zależności i formułuje wnioski z podanych zapisów	III.2)b)	7)b)	1
8 *4 pkt*	posługuje się definicją jednokładności	II.2)a)	8)d)R	4
9 *4 pkt*	posługuje się definicją i własnościami funkcji kwadratowej	II.2)a)	3)b)	1
	posługuje się definicją i własnościami funkcji logarytmicznej	II.2)a)	4)a)R	2
	formułuje wnioski wynikające z postaci badanego wyrażenia	II.2)R	4)a)R	1
10 *4 pkt*	dobiera model matematyczny danego doświadczenia losowego i wyznacza prawdopodobieństwo zdarzenia	II.2)a)	9)a) i 9)b)	3
	rozwiązuje równanie wymierne	II.2)a)	3)h)	1
11 *5 pkt*	podaje opis matematyczny danej sytuacji w postaci układu równań	III.1)a)	8)c)	1
	dobiera odpowiedni algorytm i ocenia przydatność otrzymanych wyników	III.1)b)	8)c)	2
	stosuje podany wzór do rozwiązania problemu	II.1)a)	8)c)	1
	podaje miarę kąta, mając daną wartość funkcji trygonometrycznej tego kąta	II.2)a)	4)a)	1
12 4 pkt	analizuje i interpretuje treść zadania, zapisuje zależności między obiektami matematycznymi, analizuje i interpretuje otrzymane wyniki	III.2)a)	6)b)	2
	posługuje się znanymi twierdzeniami geometrii płaskiej	II.2)a)	6)b)	2

2. Frakcje opuszczeń

Kolejny już raz podjęto w naszej Komisji decyzję o przeprowadzeniu badania opuszczeń zadań przez zdających egzamin maturalny z matematyki w sesji wiosennej.
Przez zadanie opuszczone rozumiemy takie zadanie w arkuszu pod treścią którego zdający nie dokonał żadnego zapisu. Jednym z celów badania było odróżnienie zerowej punktacji uzyskanej przez zdających za próbę rozwiązania zadania od zerowej punktacji uzyskanej w wyniku opuszczenia zadania.

Losowa próba 20% procent prac z każdego poziomu egzaminu została dobrana tak, aby reprezentatywnie odzwierciedlać procentowy udział zdających z każdego typu szkoły. Wyniki badania są zestawione w tabelach.

a. arkusz dla poziomu podstawowego (próba 685 prac)

Numer zadania w arkuszu	*1.*	*2.*	*3.*	*4.*	*5.*	*6.*	*7.*	*8.*	*9.*	*10.*	*11.*	*12.*
Opuszczenia zadań	2%	6,9%	6,6%	0,4%	9,2%	11,4%	1,2%	9,5%	3,8%	13,4%	8,9%	10,2%

Uwagę zwracają opuszczenia zadań: 10., 6. i 12, w których było ich więcej niż 10%. Zadania te dotyczyły odpowiednio: funkcji homograficznej, geometrii analitycznej oraz rachunku prawdopodobieństwa. Zestawmy teraz powyższe wyniki opuszczeń zadań ze wskaźnikami łatwości zadań z tego arkusza.

Numer zadania w arkuszu	*1.*	*2.*	*3.*	*4.*	*5.*	*6.*	*7.*	*8.*	*9.*	*10.*	*11.*	*12.*
Wskaźnik łatwości zadania	0,65	0,56	0,51	0,60	0,52	0,41	0,35	0,69	0,54	0,52	0,29	0,52

Dla zdających z naszego okręgu 3 zadania w tym arkuszu były trudne (11., 7. i 6.) zaś 9 zadań było umiarkowanie trudnych. I jeszcze jedno zestawienie. Dla pełności obrazu wyników zdających w każdym zadaniu podajemy również rozkłady uzyskiwanych przez Nich punktów.

Zadanie / *Kolejne punkty*	*1.*	*2.*	*3.*	*4.*	*5.*	*6.*	*7.*	*8.*	*9.*	*10.*	*11.*	*12.*
0	7,2%	9,6%	14,9%	33,1%	19,7%	31,5%	44,6%	13,6%	10,1%	18,1%	27,5%	26,3%
1	12,7%	21,5%	15,2%	6,9%	12,9%	7,8%	14,4%	6,7%	19,6%	21,9%	38,8%	11,5%
2	21,3%	20,1%	40,7%	6,4%	15,2%	21,9%	10,5%	18,7%	19,5%	46,9%	11,4%	15,3%
3	32,6%	31,3%	9,3%	53,6%	14,9%	14,9%	15,4%	12,9%	14,5%	13%	9,7%	23,1%
4	26,3%	17,5%	19,8%		14,7%	12,7%	15,1%	48,1%	12,8%		7,5%	23,8%
5					22,7%	11,2%			23,5%		5,2%	

Analiza danych z powyższych trzech tabel może prowadzić do rozmaitych spostrzeżeń. Wymieńmy kilka najważniejszych:

- Trzy najtrudniejsze zadania w arkuszu (11., 7. i 6.) dotyczą geometrii, odpowiednio: przestrzennej, syntetycznej oraz analitycznej, zaś czytelność przedstawianego w nich kontekstu z różnym skutkiem przekłada się na ich rozwiązywalność. Na przykład, w drugim co do wielkości opuszczeń zadaniu 7. niemal 45% zdających nie potrafi zdobyć jednego punktu.
- Najmniej opuszczane zadanie 4. ma charakter niemal zadania zamkniętego, punktowanego 0-1. Około 33% zdających nie umiało go rozwiązać, zaś prawie 54% z powodzeniem zdobywa wszystkie cztery punkty. Niewielkie są frakcje zdających, którzy zdobyli jeden lub dwa punkty za jego rozwiązanie.
- Najłatwiejsze w arkuszu zadanie 8. zostało opuszczone przez 9,5% zdających, zaś 13,6% zdających nie zdobyło ani jednego punktu, co oznacza że 4,1% zdających nie zdołało zaprezentować umiejętności sprawdzenia, czy punkt o danych współrzędnych leży na wykresie wielomianu określonego wzorem albo też nie potrafi przystąpić do rozkładania wielomianu na czynniki.

b. arkusz dla poziomu rozszerzonego (próba 843 prac)

Numer zadania w arkuszu	*1.*	*2.*	*3.*	*4.*	*5*	*6.*	*7.*	*8.*	*9.*	*10.*	*11.*	*12.*
Opuszczenia	6,4%	1,4%	3,4%	6,2%	6,8%	5,2%	8,7%	10,7%	10%	5,9%	13,4%	1,7%

Ponownie zwraca uwagę zadanie z geometrii przestrzennej (11.), które opuściło 13,4% zdających. Wyznaczanie środka jednokładności (zadanie 8.) dwóch okręgów opisanych równaniami było chyba zaskoczeniem dla zdających, bo aż 10,7% zdających nie podejmuje jego rozwiązania. Podobnie zaskakuje fakt, że 10% zdających opuściło zadanie 9., w którym zaledwie ustalenie dziedziny wiązało się z rozwiązaniem nierówności kwadratowej. Spójrzmy na zestawienie wskaźników łatwości zadań z tego arkusza.

Numer zadania w arkuszu	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Wskaźnik łatwości zadania	0,67	0,56	0,65	0,67	0,46	0,55	0,28	0,42	0,31	0,57	0,45	0,63

Podobnie jak na poziomie podstawowym zadania z tego arkusza były dla zdających z naszego okręgu albo trudne (7., 9., 8., 11. i 5.) albo umiarkowanie trudne – jak w przypadku pozostałych siedmiu zadań. Na zakończenie przedstawiamy rozkłady punktów uzyskiwanych przez zdających w zadaniach z tego arkusza.

Zadanie / Kolejne punkty	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
0	26,8%	23,2%	14,9%	14,6%	31,4%	17,9%	66,4%	19,3%	30%	30,4%	33,3%	6,4%
1	4,6%	11,3%	12,5%	12,8%	13,7%	35,8%	4,1%	33,7%	45,9%	8,9%	11,9%	32,8%
2	3%	16,1%	10,1%	7,2%	9,9%	9,4%	4,5%	23,2%	6,3%	8,3%	10,5%	8,3%
3	5,4%	15%	4,2%	19,7%	9,1%	37%	2,5%	8,1%	6,7%	6,5%	7,2%	8,5%
4	60,2%	34,3%	9,6%	45,7%	11%		22,5%	15,7%	11,2%	45,9%	13,4%	44,1%
5			48,6%		25%						23,8%	

Zestawienie trzech powyższych tabel prowokuje do formułowania spostrzeżeń. Spróbujmy zatem wymienić kilka i zaprosić do uzupełnienia poniższej listy:

- Najtrudniejsze zadanie (7.) w arkuszu opuściło 8,7% , zaś 66,4% zdających nie zdobyło żadnego punktu. Oznacza to, że 57,7% zdających nie potrafiło przeprowadzić dowodu ważnej własności paraboli. Wydaje się, że kluczowe dla dowodu było zrozumienie przez zdających sformułowania „każdy punkt paraboli”. Najczęściej powielanym błędem było sprawdzanie opisanej w zadaniu własności dla dwóch wybranych przez zdającego punktów i proste uogólnianie na pozostałe punkty leżące na paraboli.
- Drugie pod względem trudności zadanie (9.) dotyczyło zastosowania monotoniczności do wyznaczenia najmniejszej wartości funkcji logarytmicznej. 20% zdających albo nie umie wyznaczyć dziedziny tej funkcji, albo nie potrafi opisać miejsca, w którym należy szukać najmniejszej wartości funkcji malejącej.
- Około 20% zdających ma w zadaniu 11. kłopoty albo z uzasadnieniem, że objętość ostrosłupa przybiera postać opisaną podanym wzorem, albo, po zauważeniu, że podpunkty a) i b) w tym zadaniu są niezależne, wyznaczeniu miary kąta (po wcześniejszym obliczeniu tangensa tego kąta z danych dwóch wzorów).
- Najmniej opuszczane (1,4%) zadanie w arkuszu (2.) badało umiejętność rozwiązania typowej nierówności liniowej wartością bezwzględną. 23,2% zdających nie zdobywa za nią żadnego punktu, co oznacza, że 21,8% zdających nie potrafiło skorzystać z definicji wartości bezwzględnej. Często popełniany przez nich błąd – rozważanie tylko 2 przypadków postaci tej nierówności, dla $x \geq 0$ oraz dla $x < 0$ stanowi należy do „kanonu błędów” związanych ze stosowaniem definicji wartości bezwzględnej.

3. Niektóre błędy zdających

W tej części chcemy uwagę zwrócić na pojawienie się dwóch błędów logicznych w rozwiązaniach zdających egzamin na poziomie rozszerzonym. Idzie mianowicie o rozwiązania zadań 6. i 7. Oba zmuszały zdającego do podjęcia trudu przeprowadzenia dowodu. Popatrzmy na zeskanowane przykładowe rozwiązania tych zadań. Są one charakterystyczne dla znacznej części zdających.

Zadanie 6. ***(3 pkt)***

Udowodnij, że jeżeli ciąg (a, b, c) jest jednocześnie arytmetyczny i geometryczny, to $a = b = c$.

1° $b = a + r$ $c = a + 2r$

$a, a+r, a+2r$

$a = a + r \iff r = 0$
$a = a + 2r \iff 2r = 0 \Rightarrow r = 0$
$a + r = a + 2r \iff r = 0$

2° $b = a \cdot q$ $c = a \cdot q^2$

a, aq, aq^2

$a = aq \iff q = 1$
$a = aq^2 \iff q^2 = 1$
$aq = aq^2 \iff q = 1$

a, b, c

1° $a, a+r, a+2r$

$a, a+0, a+0 \cdot 2$

$a, a, a \Rightarrow a = b = c$

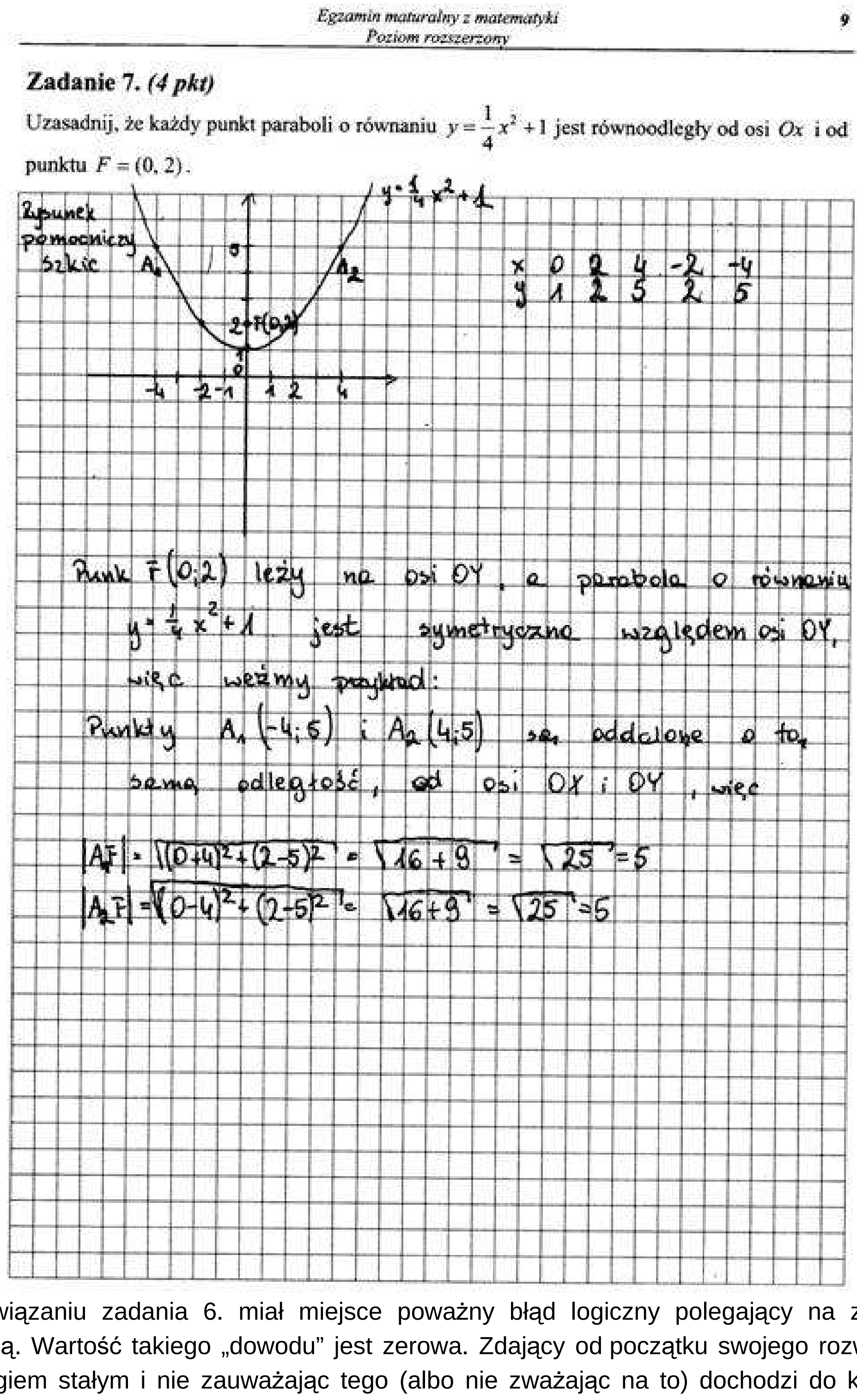
a, b, c

a, aq, aq^2

$a, a \cdot 1, a \cdot 1$

$a, a, a \Rightarrow a = b = c$

cbdu.



Egzamin maturalny z matematyki
Poziom rozszerzony
9

Zadanie 7. *(4 pkt)*

Uzasadnij, że każdy punkt paraboli o równaniu $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ jest równoodległy od osi Ox i od punktu $F = (0, 2)$.

x	0	2	4	-2	-4
y	1	2	5	2	5

Punk $F(0;2)$ leży na osi OY, a parabola o równaniu $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ jest symetryczna względem osi OY, więc weźmy przykład:

Punkty $A_1(-4;5)$ i $A_2(4;5)$ są oddalone o tą samą odległość, od osi OX i OY, więc

$|A_1F| = \sqrt{(0+4)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$|A_2F| = \sqrt{(0-4)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

W rozwiązaniu zadania 6. miał miejsce poważny błąd logiczny polegający na zamianie założenia z tezą. Wartość takiego „dowodu” jest zerowa. Zdający od początku swojego rozwiązania „pracuje” z ciągiem stałym i nie zauważając tego (albo nie zważając na to) dochodzi do konkluzji, że ciąg jest stały. Wydaje się, że zastosowane chyba po raz pierwszy na egzaminie maturalnym zadanie polegające na przeprowadzeniu dowodu twierdzenia typu implikacyjnego tak wyraźnie pokazało, że maturzyści mają kłopoty w rozróżnianiu założenia i tezy twierdzenia.

W przykładowym i błędnym rozwiązaniu zadania 7. zdający popełniali ten sam charakterystyczny błąd: sprawdzali prawdziwość twierdzenia, podając współrzędne dwóch punktów leżących na danej paraboli i obliczając odległości tych punktów od punktu F. Trudno było znaleźć ślady uogólnień takiego sprawdzenia.

Martwią oba rodzaje błędów, ale martwi jeszcze jedno. Otóż część zdających egzamin na poziomie rozszerzonym, którzy rozwiązywali zadania 6. i 7. w pokazany wyżej sposób i którzy pofatygowali się do siedziby Komisji, by wglądnąć do swojej sprawdzonej i ocenionej pracy, (a czynili to 2-3 miesiące po egzaminie) dalej nie dostrzegali słabości takich „dowodów”. Zgłaszali wręcz pisemne zastrzeżenia do oceny tych zadań przez egzaminatorów.

Postulaty kierowane do nauczycieli na kilka miesięcy przed kolejną sesją egzaminacyjną, niezależnie od poziomu egzaminu maturalnego, to:

1. zwrócenie większej uwagi na zadania z geometrii,
2. wydłużenie czasu na ćwiczenia rachunkowe oraz przekształcenia wyrażeń algebraicznych,
3. ćwiczenie w przeprowadzaniu i zapisywaniu precyzyjnych uzasadnień rozmaitych spostrzeżeń i stwierdzeń.