OKE we Wrocławiu

Sprawozdanie

z egzaminu maturalnego 2015

- województwo opolskie

MATEMATYKA

Opracowanie
Józef Daniel (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Mieczysław Fałat (Okręgowa Komisja Egzaminacyjna we Wrocławiu)
Izabela Szafrańska (Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu)

Redakcja
dr Wioletta Kozak (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
dr Marcin Smolik (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

Opracowanie techniczne
Bartosz Kowalewski (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

Współpraca
Beata Dobrosielska (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Agata Wiśniewska (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Wydziały Badań i Analiz okręgowych komisji egzaminacyjnych

Centralna Komisja Egzaminacyjna
ul. Józefa Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. 022 536 65 00, fax 022 536 65 04
e-mail: ckesekr@cke.edu.pl
www.cke.edu.pl

Matematyka – formuła od roku 2015

Poziom podstawowy

1. Opis arkusza

Arkusz egzaminacyjny z matematyki na poziomie podstawowym składał się z 25 zadań zamkniętych wyboru wielokrotnego oraz 9 zadań otwartych, w tym 6 zadań krótkiej odpowiedzi i 3 zadań rozszerzonej odpowiedzi. Zadania sprawdzały wiadomości oraz umiejętności opisane w pięciu obszarach wymagań ogólnych podstawy programowej matematyki: I – Wykorzystanie i tworzenie informacji (3 zadania zamknięte), II – Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (17 zadań zamkniętych, 3 zadania otwarte krótkiej odpowiedzi), III – Modelowanie matematyczne (3 zadania zamknięte, 1 zadanie otwarte krótkiej odpowiedzi i 1 zadanie otwarte rozszerzonej odpowiedzi), IV – Użycie i tworzenie strategii (2 zadania zamknięte, 2 zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi) oraz V – Rozumowanie i argumentacja (2 zadania otwarte krótkiej odpowiedzi). Za rozwiązanie wszystkich zadań zdający mógł otrzymać 50 punktów.

2. Dane dotyczące populacji zdających

Tabela 1. Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym*

Liczba zdających		
Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym	**ogółem**	**3735**
	ze szkół na wsi	156
	ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców	843
	ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	1742
	ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców	994
	ze szkół publicznych	3477
	ze szkół niepublicznych	258
	kobiety	2355
	mężczyźni	1380
	bez dysfunkcji	3533
	z dysleksją rozwojową	202

* Dane w tabeli dotyczą wszystkich tegorocznych absolwentów.

Z egzaminu zwolniono 4 uczniów − laureatów i finalistów Olimpiady Matematycznej.

Tabela 2. Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych

Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych	z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera	4
	słabowidzący	6
	niewidomi	0
	słabosłyszący	6
	niesłyszący	2
	ogółem	**18**

3. Przebieg egzaminu

Tabela 3. . Informacje dotyczące przebiegu egzaminu (w okręgu OKE we Wrocławiu)

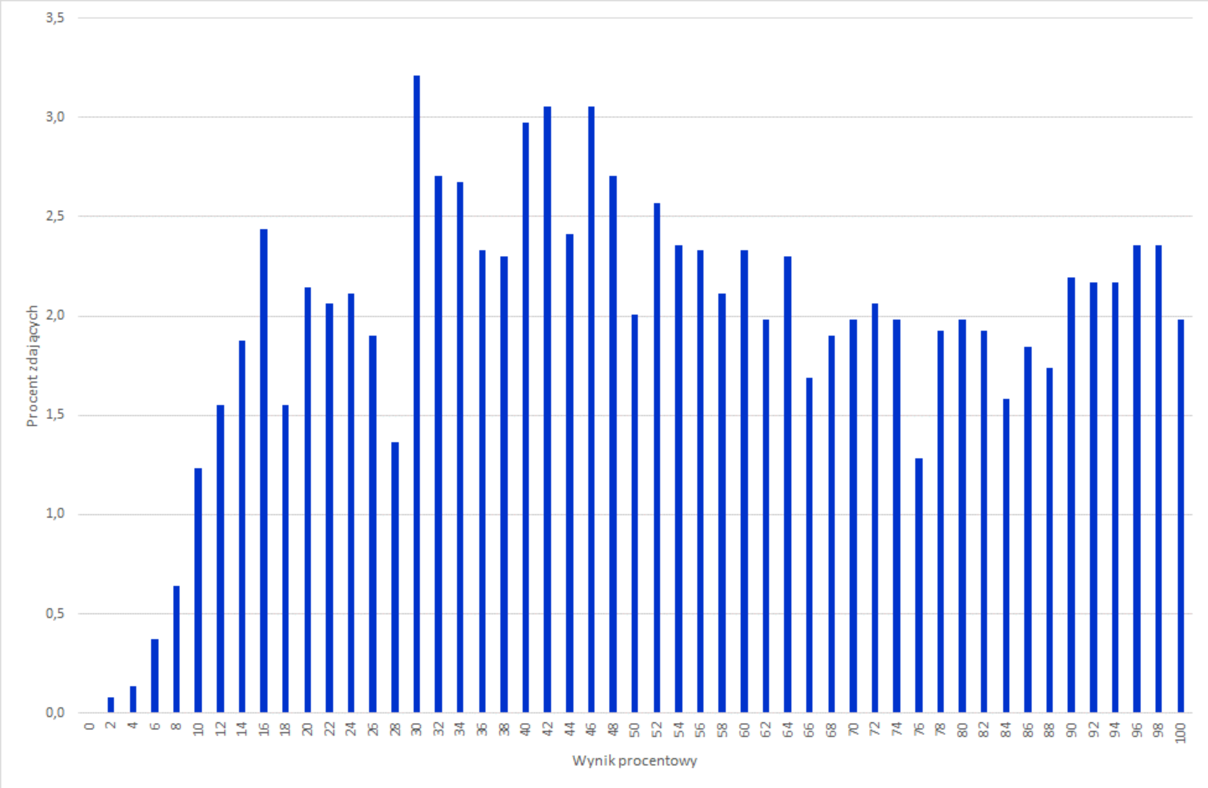
<table>
<tr><td colspan="3">Termin egzaminu</td><td>5 maja 2015 r.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Czas trwania egzaminu</td><td>170 minut</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba szkół</td><td>326</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba zespołów egzaminatorów*</td><td>19</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba egzaminatorów*</td><td>456</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba obserwatorów[1] (§ 143)**</td><td>32</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Liczba unieważnień[1]</td><td colspan="3">w przypadku:</td></tr>
<tr><td rowspan="3">§ 99 ust. 1</td><td>stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego</td><td>0</td></tr>
<tr><td>wniesienia lub korzystania przez zdającego w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego</td><td>5</td></tr>
<tr><td>zakłócenia przez zdającego prawidłowego przebiegu części egzaminu w sposób utrudniający pracę pozostałym zdającym</td><td>0</td></tr>
<tr><td>§ 99 ust. 2</td><td>stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego</td><td>18</td></tr>
<tr><td>§ 146 ust. 3</td><td>stwierdzenia naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzenia egzaminu</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba wglądów[1] (§ 107)**</td><td>403</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba prac, w których nie podjęto rozwiązania zadań</td><td>0</td></tr>
</table>

* Dane dotyczą obu poziomów egzaminu (podstawowego i rozszerzonego) łącznie.
** Dane dotyczą „nowej formuły” i „starej formuły” łącznie.

[1] Na podstawie rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 30 kwietnia 2007 r. w sprawie warunków i sposobu oceniania, klasyfikowania i promowania uczniów i słuchaczy oraz przeprowadzania sprawdzianów i egzaminów w szkołach publicznych (Dz.U. nr 83, poz. 562, ze zm.)

4. Podstawowe dane statystyczne

Wyniki zdających



Wykres 1. Rozkład wyników zdających

Tabela 4. Wyniki zdających – parametry statystyczne*

Zdający:	Liczba zdających	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)	Odsetek sukcesów**
ogółem	3735	2	100	52	30	54	26	81***
w tym:								
bez dysfunkcji	3533	2	100	52	30	54	26	81
z dysleksją rozwojową	202	10	100	52	30	53	24	85

* Parametry statystyczne podane zostały dla grup liczących 100 lub więcej zdających.
** Dane dotyczą tegorocznych absolwentów, którzy przystąpili do wszystkich egzaminów obowiązkowych.
*** Stan na 30 czerwca 2015 r. Po egzaminie poprawkowym (w sierpniu) ogólny odsetek sukcesów wyniósł 88%.

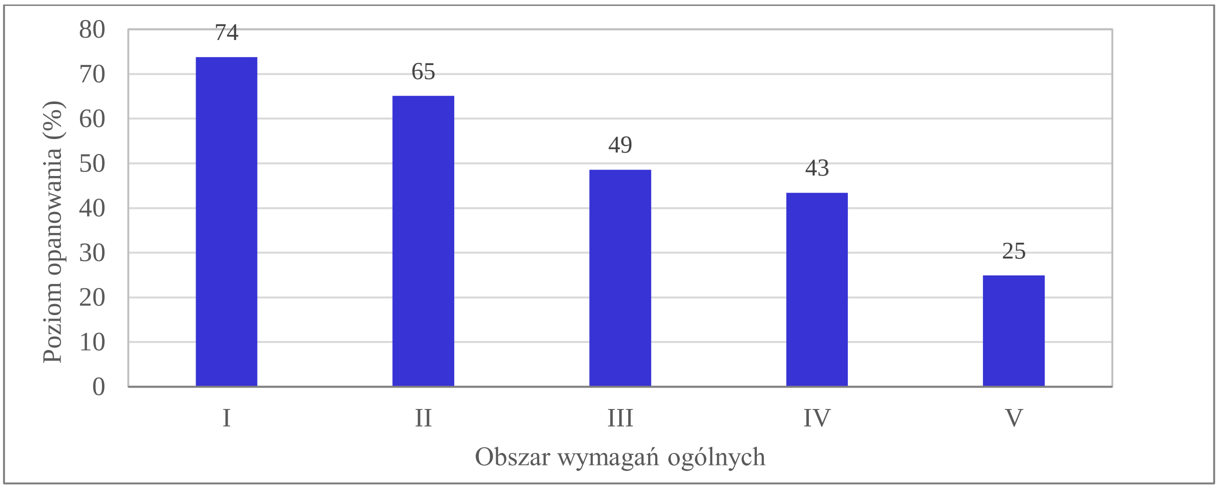
Poziom wykonania zadań

Tabela 5. Poziom wykonania zadań

Nr zad.	Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poziom wykonania zadania (%)
1.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. 1.8) Zdający posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej.	78
2.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. 1.6) Zdający wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.	82
3.	III. Modelowanie matematyczne.	1. Liczby rzeczywiste. 1.9) Zdający wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat.	49
4.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. 2.1) Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $\left(a \pm b\right)^2$ oraz $a^2 - b^2$.	79
5.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. 3.2) Zdający wykorzystuje interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.	53
6.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. 3.7) Zdający korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x\left(x+1\right)\left(x-7\right)=0$.	84
7.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. 3.8) Zdający rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3}=2$, $\frac{x+1}{x}=2x$.	65
8.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. 4.3) Zdający odczytuje z wykresu własności funkcji.	21
9.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. 4.6) Zdający wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie.	78
10.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	4. Funkcje. 4.7) Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.	60
11.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. 4.9) Zdający wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.	74
12.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. 3.3) Zdający rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.	70
13.	III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. 5.4) Zdający stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.	63
14.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	6. Trygonometria. 6.1) Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°.	70
15.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. 6.4) Zdający stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha$ oraz $\sin\left(90^\circ - \alpha\right) = \cos\alpha$.	66

16.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. 7.1) Zdający stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.	70
17.	III. Modelowanie matematyczne.	7. Planimetria. 7.4) Zdający korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi.	57
18.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. 8.2) Zdający bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych.	76
19.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. 8.2) Zdający bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych.	71
20.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. 8.5) Zdający wyznacza współrzędne środka odcinka. 8.7) Zdający znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych w symetrii środkowej względem początku układu.	67
21.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	9. Stereometria. 9.2) Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami i płaszczyznami.	73
22.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	9. Stereometria. 9.6) Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.	82
23.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	9. Stereometria. 9.6) Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.	66
24.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10. Elementy statystyki opisowej. 10.1) Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych.	89
25.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10. Elementy statystyki opisowej. 10.3) Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.	47
26.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. 3.5) Zdający rozwiązuje nierówność kwadratową z jedną niewiadomą.	67
27.	V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. 2.1) Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.	16
28.	V. Rozumowanie i argumentacja.	G10. Figury płaskie. G10.9) Zdający oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów.	32
29.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. 4.11) Zdający wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.	49
30.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. 8.1) Zdający wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty.	39
31.	III. Modelowanie matematyczne.	G7. Równania. G7.7) Zdający za pomocą równań lub układów równań opisuje i rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym. G7.6) Zdający rozwiązuje układy równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi.	36
32.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. 9.6) Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.	46

33.	III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. 10.3) Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.	47
34.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	5. Ciągi. 5.3) Zdający stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. 5.4) Zdający stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.	31



Wykres 2. Poziom wykonania zadań w obszarze wymagań ogólnych (dane ogólnokrajowe)

Poziom rozszerzony

1. Opis arkusza

Arkusz egzaminacyjny z matematyki na poziomie rozszerzonym zawierał 5 zadań zamkniętych wyboru wielokrotnego, 11 zadań otwartych, w tym 6 zadań krótkiej i 5 zadań rozszerzonej odpowiedzi. Zadania sprawdzały wiadomości oraz umiejętności opisane w czterech obszarach wymagań ogólnych podstawy programowej matematyki: II – Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (5 zadań zamkniętych, 2 zadania otwarte krótkiej odpowiedzi), III – Modelowanie matematyczne (2 zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi), IV – Użycie i tworzenie strategii (5 zadań rozszerzonej odpowiedzi) oraz V – Rozumowanie i argumentacja (2 zadania krótkiej odpowiedzi).
Za rozwiązanie wszystkich zadań zdający mógł otrzymać 50 punktów.

2. Dane dotyczące populacji zdających

Tabela 6. Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym*

Liczba zdających		
Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym	**ogółem**	**1047**
	ze szkół na wsi	10
	ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców	192
	ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	509
	ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców	336
	ze szkół publicznych	1010
	ze szkół niepublicznych	37
	kobiety	479
	mężczyźni	568
	bez dysfunkcji	991
	z dysleksją rozwojową	56

* Dane w tabeli dotyczą wszystkich tegorocznych absolwentów.

Z egzaminu zwolniono 4 uczniów − laureatów i finalistów Olimpiady Matematycznej.

Tabela 7. Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych

Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych	z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera	0
	słabowidzący	1
	niewidomi	0
	słabosłyszący	3
	niesłyszący	0
	ogółem	**4**

3. Przebieg egzaminu

Tabela 8. . Informacje dotyczące przebiegu egzaminu (w okręgu OKE we Wrocławiu)

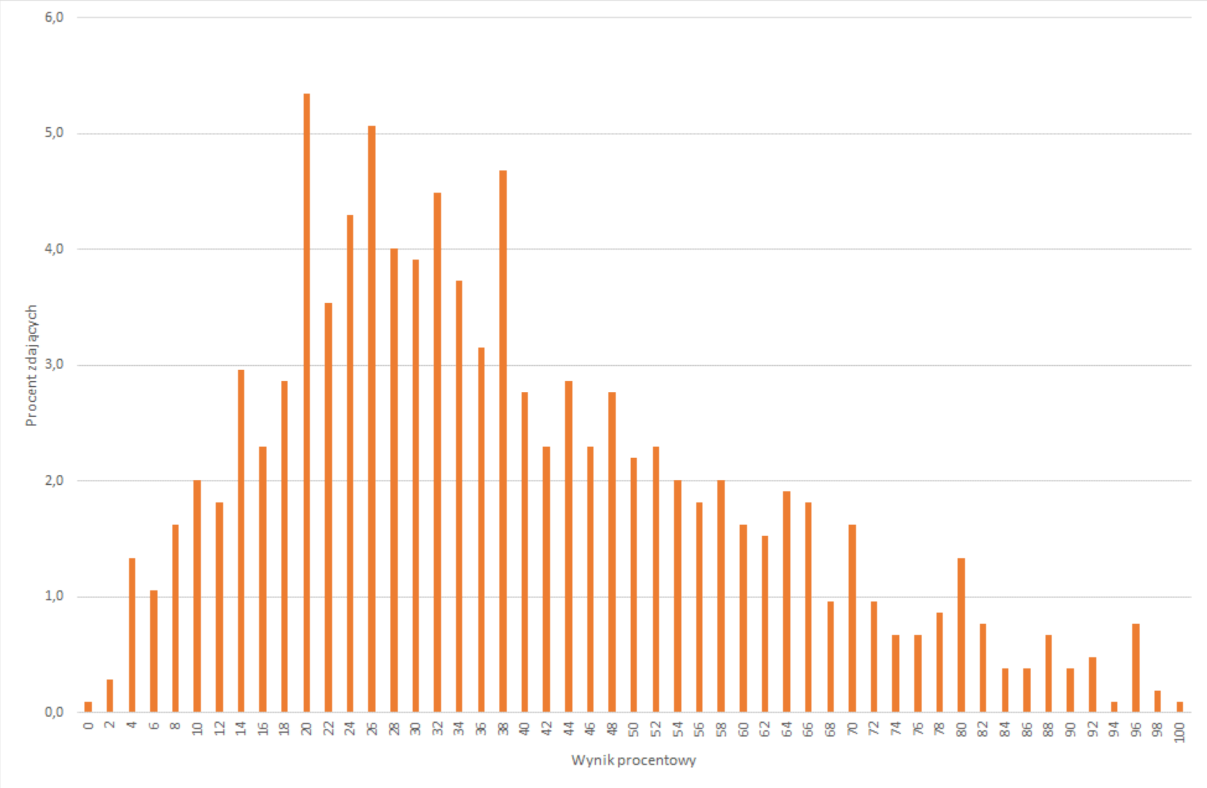
<table>
<tr><td colspan="3">Termin egzaminu</td><td>8 maja 2015 r.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Czas trwania egzaminu</td><td>180 minut</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba szkół</td><td>204</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba zespołów egzaminatorów*</td><td>19</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba egzaminatorów*</td><td>456</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba obserwatorów[2] (§ 143)**</td><td>10</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Liczba unieważnień[2]</td><td colspan="3">w przypadku:</td></tr>
<tr><td rowspan="3">§ 99 ust. 1</td><td>stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego</td><td>0</td></tr>
<tr><td>wniesienia lub korzystania przez zdającego w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego</td><td>0</td></tr>
<tr><td>zakłócenia przez zdającego prawidłowego przebiegu części egzaminu w sposób utrudniający pracę pozostałym zdającym</td><td>0</td></tr>
<tr><td>§ 99 ust. 2</td><td>stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego</td><td>0</td></tr>
<tr><td>§ 146 ust. 3</td><td>stwierdzenia naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzenia egzaminu</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba wglądów[2] (§ 107)**</td><td>90</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba prac, w których nie podjęto rozwiązania zadań</td><td>1</td></tr>
</table>

* Dane dotyczą obu poziomów egzaminu (podstawowego i rozszerzonego) łącznie.
** Dane dotyczą „nowej formuły" i „starej formuły" łącznie.

[2] Na podstawie rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 30 kwietnia 2007 r. w sprawie warunków i sposobu oceniania, klasyfikowania i promowania uczniów i słuchaczy oraz przeprowadzania sprawdzianów i egzaminów w szkołach publicznych (Dz.U. nr 83, poz. 562, ze zm.)

4. Podstawowe dane statystyczne

Wyniki zdających



Wykres 3. Rozkład wyników zdających

Tabela 9. Wyniki zdających – parametry statystyczne*

Liczba zdających	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
1047	0	100	36	20	39	21

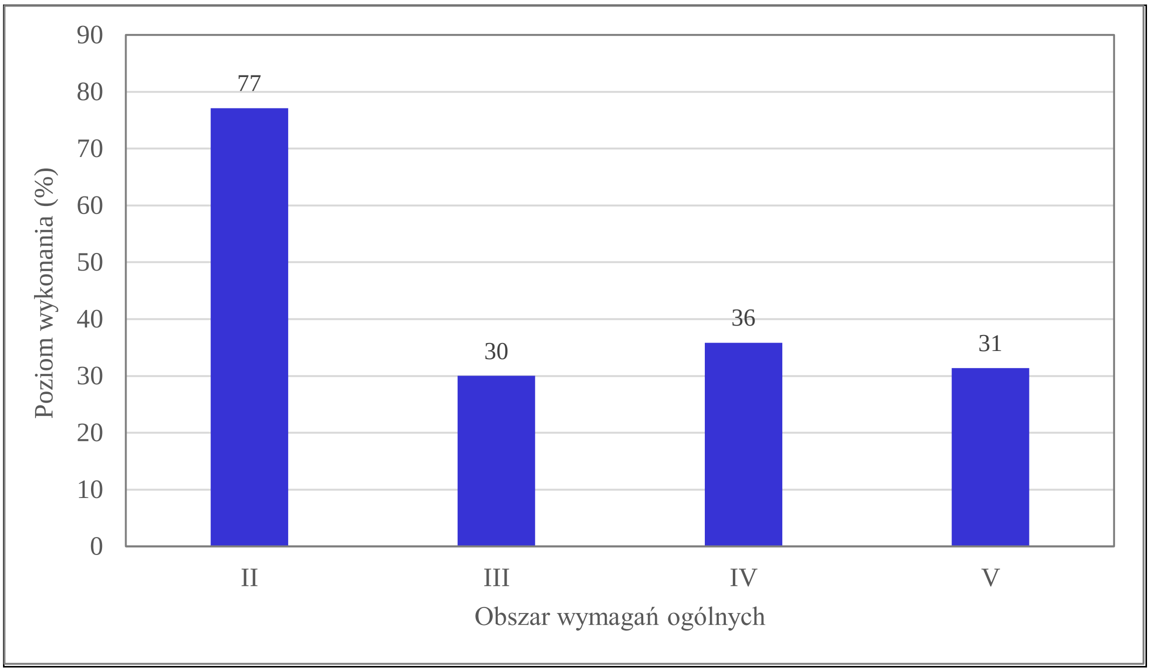
* Dane dotyczą tegorocznych absolwentów, którzy przystąpili do wszystkich egzaminów obowiązkowych.

Poziom wykonania zadań

Tabela 10. Poziom wykonania zadań

Nr zad.	Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poziom wykonania zadania (%)
1.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. R1.1) Zdający wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną, zaznacza na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności typu: $\lvert x-a\rvert = b$, $\lvert x-a\rvert > b$, $\lvert x-a\rvert < b$.	98
2.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. R3.9) Zdający rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną.	63
3.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. R2.1) Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$.	89
4.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	6. Trygonometria. R6.6) Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne.	58
5.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. R8.4) Zdający oblicza odległość punktu od prostej.	88
6.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	5. Ciągi. R5.2) Zdający oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów.	83
7.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. 4.10) Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej.	61
8.	V. Rozumowanie i argumentacja	2. Wyrażenia algebraiczne. R2.6) Zdający dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne; rozszerza i (w łatwych przykładach) skraca wyrażenia wymierne. 2.1) Zdający używa wzory skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$, $a^2 - b^2$.	18
9.	V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. R7.1) Zdający stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu.	32
10.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. R7.1, R7.5) Zdający stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu; znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.	32
11.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. R10.3) Zdający korzysta z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.	62
12.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	11. Rachunek różniczkowy. R11.3) Zdający korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej. 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. 8.3) Zdający wyznacza równania prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt.	53
13.	III. Modelowanie matematyczne.	3. Równania i nierówności. R3.1) Zdający stosuje wzory Viète'a.	18

14.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. 9.6) Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.	23
15.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	5. Ciągi. 5.3) Zdający stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. 3. Równania i nierówności. 3.7) Zdający korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7)=0$.	16
16.	III. Modelowanie matematyczne.	11. Rachunek różniczkowy. R11.6) Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.	30



Wykres 4. Poziom wykonania zadań w obszarze wymagań ogólnych (dane ogólnokrajowe)

Komentarz

UMIEJĘTNOŚCI OPANOWANE NAJLEPIEJ

Wyniki matury z matematyki na **poziomie podstawowym** wskazują, że umiejętności szczególnie dobrze opanowane przez zdecydowaną większość zdających reprezentują dość szerokie spektrum. Najłatwiejszym zadaniem w arkuszu okazało się zadanie 24. (poziom wykonania zadania – 89%), badające umiejętność stosowania średniej arytmetycznej. Aby bezbłędnie rozwiązać zadanie, należało wyznaczyć średnią arytmetyczną zestawu danych i dodać do tego zestawu taką liczbę, dla której średnia arytmetyczna nowego zestawu będzie taka sama jak przed zmianą zestawu danych. Rezultaty maturzystów potwierdzają coraz lepsze rozumienie pojęć statystycznych, stosowanych często w kontekstach praktycznych.

W zadaniu 6. poziom wykonania zadania wyniósł 84%. Zadanie to odwoływało się do umiejętności wykorzystania własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań. Należało znaleźć wszystkie rozwiązania równania i wyznaczyć ich sumę. Większość zdających nie miała z tym kłopotów. Wysoki wynik osiągnęli zdający za rozwiązanie zadania 2. – poziom wykonania 82%, tym samym potwierdzili umiejętność stosowania definicji logarytmu i prowadzenia obliczeń, w których występują logarytmy. Zadanie 22. z kolei sprawdzało umiejętność stosowania własności figur geometrycznych. Do jego poprawnego rozwiązania należało obliczyć objętość stożka, po uprzednim wyznaczeniu wysokości i promienia podstawy stożka. 82% zdających wykonało to zadanie bezbłędnie. 79% zdających było w stanie wykorzystać wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów, by znaleźć rozwiązanie równania (zadanie 4.). Podobnie 78% maturzystów poprawnie wyznaczyło wzór funkcji liniowej, wykorzystując informację o współrzędnych punktu należącego do jej wykresu (zadanie 9.).

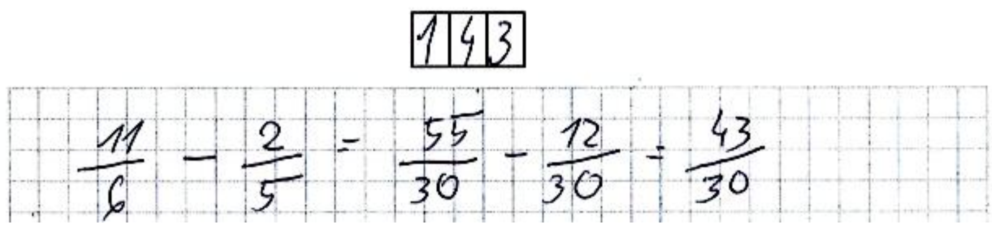
Zatem wśród dobrze opanowanych umiejętności znalazły się zarówno te związane ze statystyką, jak i przydatne przy rozwiązywaniu równań, odwołujące się do rozumienia pojęcia logarytmu, a także wymagające znajomości własności figur geometrycznych. Warto podkreślić, że wszystkie zadania, które były rozwiązane poprawnie przez 80% i więcej zdających, nie były zadaniami jednoczynnościowymi, sprowadzającymi się do podstawienia do znanego wzoru lub zastosowania jednej definicji. We wszystkich omówionych wyżej przykładach zagadnienia występowały w szerszym kontekście, a do rozwiązania zadań potrzebne było wykonanie dodatkowych czynności, nie wystarczało mechaniczne odtworzenie wyuczonej reguły.

W arkuszu dla **poziomu rozszerzonego** najłatwiejsze okazało się zadanie 1. (poziom wykonania zadania – aż 98%), sprawdzające umiejętność wykorzystania pojęcia wartości bezwzględnej i jej interpretacji geometrycznej. W zadaniu należało wyznaczyć przedział, będący zbiorem rozwiązań prostej nierówności z wartością bezwzględną, typu $|x-a| \le b$. Wysoki wynik w tym zadaniu nie powinien być zaskoczeniem, bo ten typ nierówności funkcjonował od 2010 roku w arkuszach egzaminacyjnych, także na poziomie podstawowym.

Wysoki wynik na poziomie rozszerzonym zdający otrzymali również za rozwiązanie zadania 5. – poziom wykonania 88%, w którym trzeba było obliczyć odległość punktu od prostej. Zdecydowana większość zdających nie miała problemu z poprawnym rozwiązaniem zadania 3. (poziom wykonania – 89%). Zadanie to sprawdzało umiejętność stosowania wzoru skróconego mnożenia na sześcian różnicy.

Do zadań z wysokimi wynikami należy także zadanie 6., będące jedynym w arkuszu zadaniem otwartym z kodowaną odpowiedzią. Maturzyści, oprócz obliczenia granicy ciągu z wykorzystaniem granic ciągów $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ oraz twierdzeń o działaniach na granicach ciągów, kodowali swoje odpowiedzi według polecenia sformułowanego w treści zadania. Maksymalną liczbę punktów zdający otrzymywał tylko wtedy, gdy w kratkach została zapisana poprawna odpowiedź: `1, 4, 3`. Zadanie okazało się łatwe dla zdających, poziom jego wykonania wyniósł 83%. Oznacza to, że tylko 17% maturzystów nie opanowało techniki obliczania granicy ciągu liczbowego określonego różnicą wyrażeń wymiernych. Dodajmy, że z postaci obu wyrażeń (a także z treści tego zadania) wynika, że granica ciągu istnieje i jest skończona. Zatem wystarczyło osobno obliczyć granicę odjemnej oraz odjemnika i otrzymane ułamki odjąć, a wynik końcowy mógł być uzyskany przy użyciu kalkulatora. Oto przykład w pełni poprawnego rozwiązania.

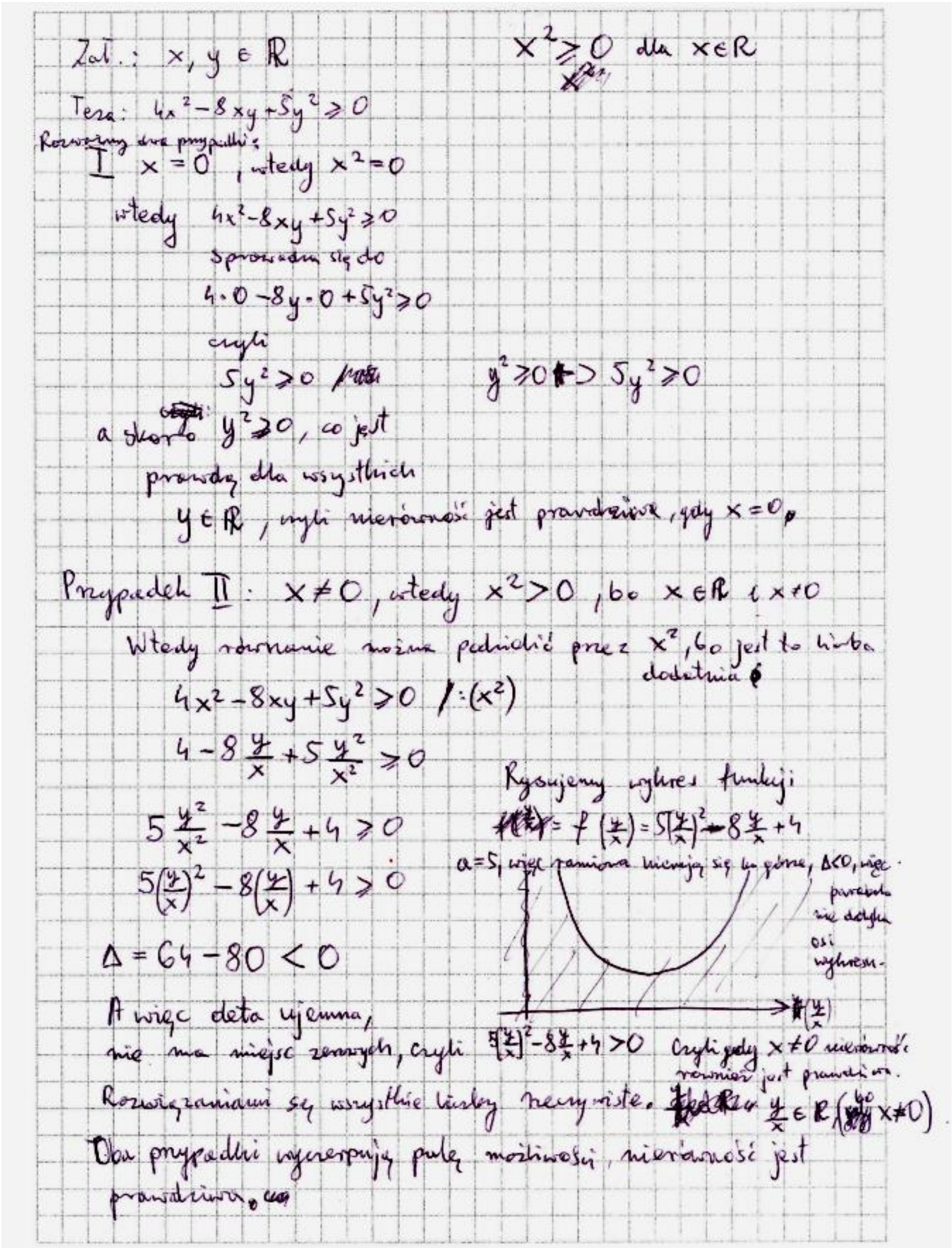
Przykład 1.



UMIEJĘTNOŚCI SPRAWIAJĄCE TRUDNOŚCI

Tradycyjnie największym wyzwaniem dla maturzystów, zdających egzamin na **poziomie podstawowym**, pozostaje przeprowadzenie dowodu z zakresu algebry. Wśród zadań z arkusza z poziomu podstawowego najtrudniejsze okazało się to, które wymagało uzasadnienia prawdziwości nierówności $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$ (zadanie 27. – poziom wykonania zadania wyniósł 16%). Zdający prezentowali różne sposoby dowodzenia: zastosowanie wzorów skróconego mnożenia, rozwiązanie nierówności kwadratowej, na przykład z niewiadomą *x* i parametrem *y*, oszacowanie z góry wyrażenia po lewej stronie nierówności przez wyrażenie $4x^2 - 8xy + 4y^2 \geq 0$ czy wreszcie analizę znaków liczb *x* i *y*. Poniżej jeden z bardziej oryginalnych, w pełni poprawnych, sposobów rozwiązania zadania, w którym zdający rozważa dwa przypadki: dla $x = 0$ i $x \neq 0$. W pierwszym przypadku lewa strona nierówności jest dodatnią wielokrotnością liczby nieujemnej, w drugim – trójmianem kwadratowym przyjmującym wyłącznie dodatnie wartości. Autor rozwiązania musi mieć spore doświadczenie w przeprowadzaniu dowodów.

Przykład 2.



Zał.: $x, y \in \mathbb{R}$ $\quad$ $x^2 \geq 0$ dla $x \in \mathbb{R}$

Teza: $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$

Rozważmy dwa przypadki:

I $x = 0$, wtedy $x^2 = 0$

wtedy $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$

sprowadza się do

$4 \cdot 0 - 8y \cdot 0 + 5y^2 \geq 0$

czyli

$5y^2 \geq 0$ $\quad$ $y^2 \geq 0 \Rightarrow 5y^2 \geq 0$

a skoro $y^2 \geq 0$, co jest prawdą dla wszystkich $y \in \mathbb{R}$, czyli nierówność jest prawdziwa, gdy $x = 0$.

Przypadek II: $x \neq 0$, wtedy $x^2 > 0$, bo $x \in \mathbb{R}$ i $x \neq 0$

Wtedy równanie można podzielić przez x^2, bo jest to liczba dodatnia.

$4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0 \quad / : (x^2)$

$4 - 8\frac{y}{x} + 5\frac{y^2}{x^2} \geq 0$

$5\frac{y^2}{x^2} - 8\frac{y}{x} + 4 \geq 0$

$5\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 8\left(\frac{y}{x}\right) + 4 \geq 0$

$\Delta = 64 - 80 < 0$

Rysujemy wykres funkcji

$f\left(\frac{y}{x}\right) = 5\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 8\frac{y}{x} + 4$

$a = 5$, więc ramiona kierują się ku górze, $\Delta < 0$, więc parabola nie dotyka osi wykresu.

A więc delta ujemna, nie ma miejsc zerowych, czyli $5\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 8\frac{y}{x} + 4 > 0$. Czyli gdy $x \neq 0$ nierówność również jest prawdziwa.

Rozwiązaniami są wszystkie liczby rzeczywiste. $\frac{y}{x} \in \mathbb{R}$ (bo $x \neq 0$).

Oba przypadki wyczerpują pulę możliwości, nierówność jest prawdziwa.

Warto zauważyć, że wśród błędów popełnianych w rozwiązaniach tego zadania dwa dominowały. Pierwszy, to sprawdzanie prawdziwości tej nierówności dla konkretnych liczb x i y – zdający po podstawieniu jednej, dwóch, czasem trzech par liczb, zapisywali „wniosek”, że nierówność jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej x i dla dowolnej liczby rzeczywistej y (przykłady poniżej). Co ciekawe, mimo corocznego publikowania schematów oceniania, w których są wyraźnie zapisane uwagi o przyznawaniu 0 punktów za takie rozwiązania w zadaniach na dowodzenie, wcale nie zmniejsza się liczba tego typu błędów w kolejnych sesjach egzaminacyjnych.

Przykład 3.

kwadrat liczby ujemnej zawsze będzie dodatni

np. dla $x = 2$ $y = 2$ oraz $x = -2$ $y = -2$

$4\cdot 2^2 - 8\cdot 2\cdot 2 + 5\cdot 2^2 \geq 0$

$16 - 32 + 20 \geq 0$

$4 \geq 0$

$4\cdot(-2)^2 - 8\cdot(-2)(-2) + 5\cdot(-2)^2 \geq 0$

$4\cdot 4 - 8\cdot 4 + 5\cdot 4 \geq 0$

$16 - 32 + 20 \geq 0$

$4 \geq 0$

Dla każdej liczby rzeczywistej x lub y nierówność kwadratowa będzie większa lub równa 0, ponieważ każda liczba (dodatnia lub ujemna) podniesiona do potęgi kwadratowej będzie liczbą dodatnią.

Przykład 4.

Wykażę, że dla każdej liczby rzeczywistej x i y prawdziwa jest równość $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$

Podnoszenie liczb do potęgi parzystej, w tym wypadku do kwadratu, anuluje nam minusy, więc nawet liczby ujemne stają się dodatnie, a więc większe niż 0. $\in 4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$

Mnożenie liczb ujemnych także anuluje ich ujemność.

$x \in \mathbb{R}$ $y \in \mathbb{R}$

Przykład: $x = -2$ $y = -3$

$4(-2)^2 - 8(-2)(-3) + 5(-3)^2 \geq 0$

$16 - 48 + 45 \geq 0$

$13 \geq 0$

Drugi typ błędu, charakterystyczny dla tego zadania, to nieprawidłowa, często nieprecyzyjna argumentacja. Zdający stwierdzali na przykład, że kwadrat liczby rzeczywistej jest liczbą dodatnią lub że suma kwadratów dwóch liczb rzeczywistych jest liczbą dodatnią albo też, że dla dowolnych dwóch liczb rzeczywistych x i y „musi” być prawdziwa nierówność $4x^2 + 5y^2 \geq 8xy$. Zdarzały się ponadto rozwiązania, w których zdający usiłowali przekonać egzaminatorów, że lewa strona podanej nierówności jest dokładnym zastosowaniem wzoru na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń. Oto przykłady takich prób.

Przykład 5.

$x \in \mathbb{R}$

$y \in \mathbb{R}$

Wykażę, że dla każdej x i $y \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest nierówność:

$4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$

$(2x - \sqrt{5}y)^2 \geq 0$

nierówność jest prawdziwa ponieważ każda liczba całkowita podniesiona do kwadratu jest większa bądź równa 0.

Przykład 6.

$\cancel{(2x - \sqrt{5}y)^2 \geq 0}$

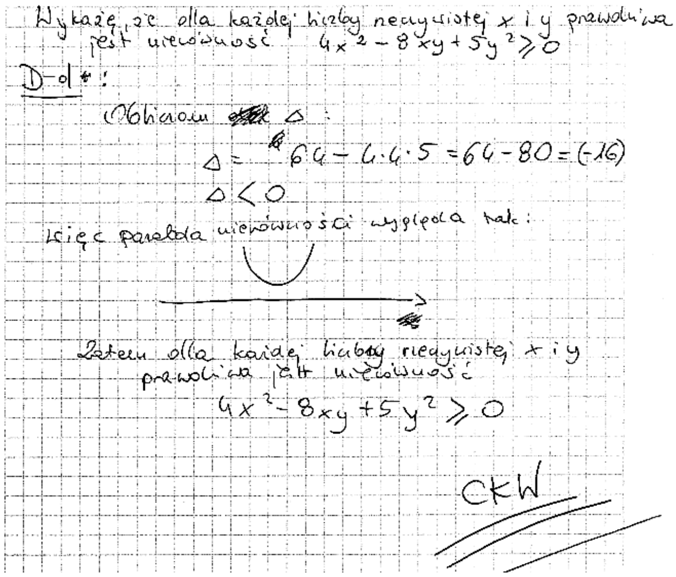
$4x^2 + 5y^2 - \cancel{8xy} \geq 0$

$(2x - \sqrt{5}y)^2$

Każda liczba podniesiona do kwadratu jest dodatnia lub równa zero zatem ta nierówność jest prawdziwa ~~Zapodane~~ Jest to wykorzystany podstawowy wzór skróconego mnożenia $(a-b)^2$, którego wynik zawsze jest ≥ 0

Niektórzy zdający potraktowali tę nierówność jak nierówność kwadratową z jedną niewiadomą, co mogło stanowić punkt wyjścia do poprawnego rozwiązania, ale nie zauważali, że obliczany wyróżnik będzie zależał od zmiennej (jak w poniższym przykładzie).

Przykład 7.



Wykażę, że dla każdej liczby rzeczywistej x i y prawdziwa jest nierówność $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$

D-d:

Obliczam Δ:

$\Delta = 64 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 64 - 80 = (-16)$

$\Delta < 0$

Więc parabola nierówności wygląda tak:

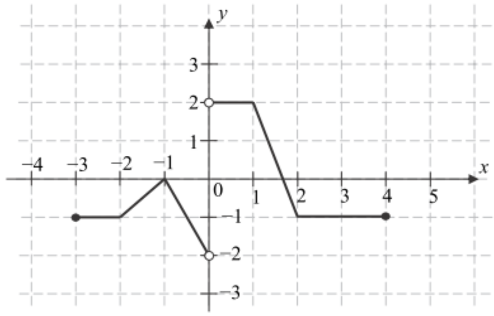
Zatem dla każdej liczby rzeczywistej x i y prawdziwa jest nierówność

$4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$

CKW

Zadanie nr 8, z poziomem wykonania równym 21%, było drugim w kolejności (po dowodzie algebraicznym) najtrudniejszym zadaniem w arkuszu. Wydawać się mogło, że umiejętność poprawnego odczytania zbioru wartości funkcji z jej wykresu nie może zaskoczyć maturzystów, umiejętność odczytywania wartości funkcji z wykresu jest zapisana w podstawie programowej z matematyki już na etapie gimnazjum.

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f.



Zbiorem wartości funkcji f jest

A. $(-2,2)$ **B.** $\langle -2,2)$ **C.** $\langle -2,2\rangle$ **D.** $(-2,2\rangle$

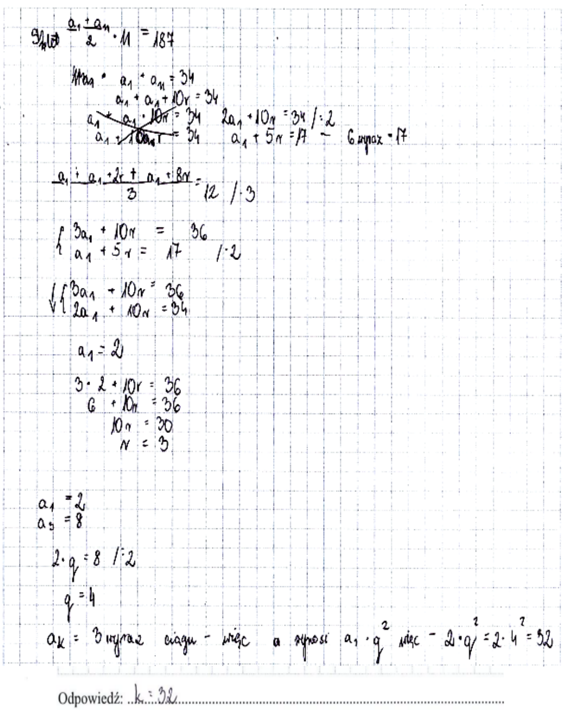
Mniej niż czwarta część maturzystów zauważyła, że równanie $f(x)=2$ ma rozwiązanie (a nawet nieskończenie wiele rozwiązań) i „puste” kółeczko w punkcie o współrzędnych $(0,2)$ nie może stanowić jedynego punktu odniesienia do ustalenia czy liczba 2 jest lub nie jest wartością funkcji.

Niezadowalające rezultaty zdający osiągnęli również w zadaniu 34., które badało umiejętności z zakresu użycia i tworzenia strategii. Do rozwiązania zadania wystarczało zastosowanie własności, dobrze znanych z nauki szkolnej, ciągów liczbowych: arytmetycznego oraz geometrycznego.

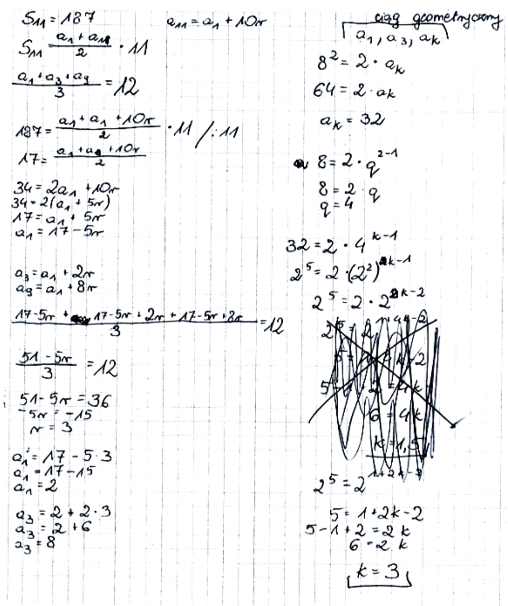
> W nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, suma jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 187. Średnia arytmetyczna pierwszego, trzeciego i dziewiątego wyrazu tego ciągu, jest równa 12. Wyrazy a_1, a_3, a_k ciągu (a_n), w podanej kolejności, tworzą nowy ciąg – trzywyrazowy ciąg geometryczny (b_n). Oblicz *k*.

Stosunkowo niski wskaźnik poziomu wykonania tego zadania (31%) należy najprawdopodobniej wiązać z połączeniem w jednym zadaniu informacji o dwóch ciągach (arytmetycznym i geometrycznym). Tego typu zadanie nie występowało w ostatnich latach w arkuszach egzaminacyjnych. Nie może to być jednak żadnym usprawiedliwieniem słabego wyniku, tym bardziej, że około 50% maturzystów nie uzyskało za rozwiązanie tego zadania nawet jednego punktu (z pięciu możliwych do zdobycia). Oznacza, że połowa zdających nie potrafiła dostrzec możliwości zapisania równań z tymi samymi niewiadomymi, a_1 i r, wynikających z faktu, że w podanym ciągu arytmetycznym były spełnione dwa warunki: $S_{11} = 187$ i $\frac{a_1 + a_3 + a_9}{3} = 12$. Pełne, poprawne rozwiązanie zadania zaprezentował zaledwie co piąty maturzysta. Część zdających nie uzyskała maksymalnej liczby punktów z powodu błędów rachunkowych, popełnianych podczas rozwiązywania układu równań albo też z powodu ułożenia niepoprawnej zależności dotyczącej ciągu geometrycznego. Częstym błędem było też nieodróżnianie numeru wyrazu a_k od samego wyrazu. Oto przykłady takiego zagubienia się w rozumowaniu.

Przykład 8.

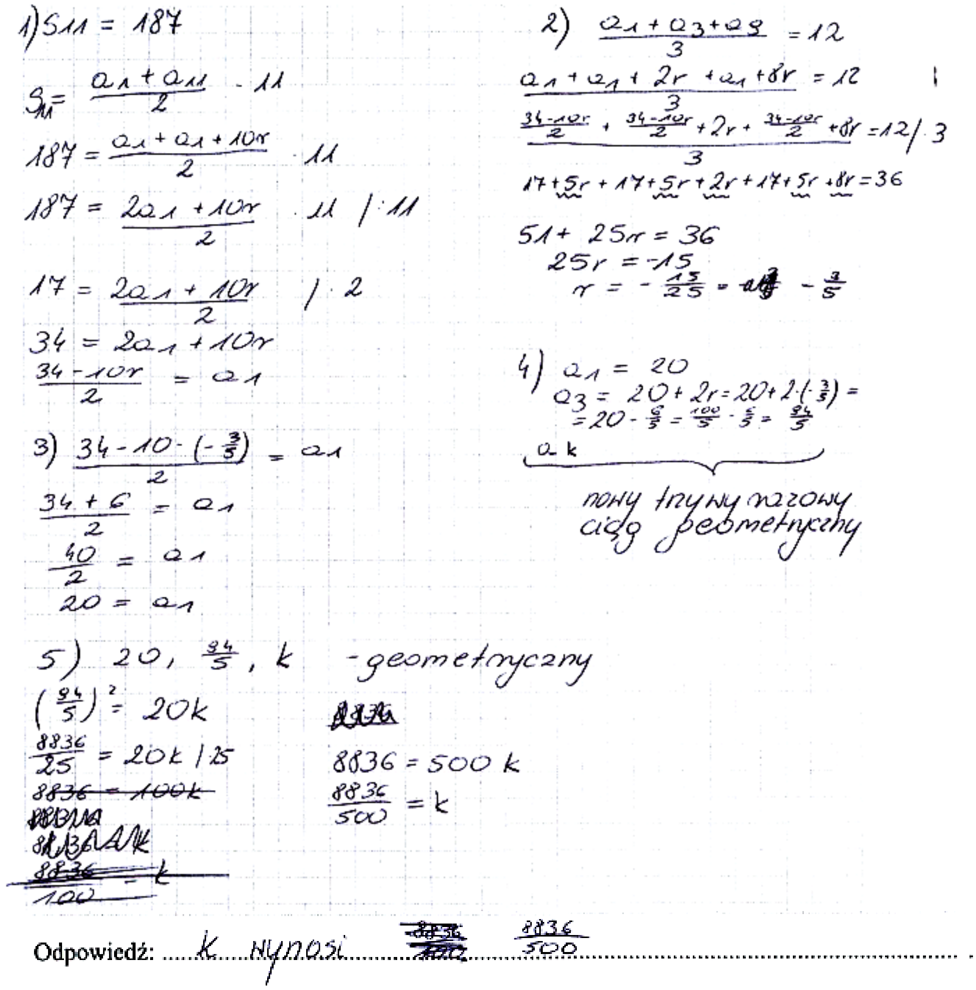

$\frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11 = 187$
$a_1 + a_{11} = 34$
$a_1 + a_1 + 10r = 34$
$2a_1 + 10r = 34 \ /:2$
$a_1 + 5r = 17$ ~ 6 wyraz = 17
$\frac{a_1 + a_1 + 2r + a_1 + 8r}{3} = 12 \ /\cdot 3$
$\begin{cases} 3a_1 + 10r = 36 \\ a_1 + 5r = 17 \ /\cdot 2 \end{cases}$
$\begin{cases} 3a_1 + 10r = 36 \\ 2a_1 + 10r = 34 \end{cases}$
$a_1 = 2$
$3 \cdot 2 + 10r = 36$
$6 + 10r = 36$
$10r = 30$
$r = 3$
$a_1 = 2$
$a_3 = 8$
$2 \cdot q = 8 \ /:2$
$q = 4$
a_k = 3 wyraz ciągu – więc a wynosi $a_1 \cdot q^2$ więc – $2 \cdot q^2 = 2 \cdot 4^2 = 32$
Odpowiedź: $k = 32$

Przykład 9.


$S_{11} = 187$
$a_{11} = a_1 + 10r$
$S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11$
$\frac{a_1 + a_3 + a_9}{3} = 12$
$187 = \frac{a_1 + a_1 + 10r}{2} \cdot 11 \ /:11$
$17 = \frac{a_1 + a_1 + 10r}{2}$
$34 = 2a_1 + 10r$
$34 = 2(a_1 + 5r)$
$17 = a_1 + 5r$
$a_1 = 17 - 5r$
$a_3 = a_1 + 2r$
$a_9 = a_1 + 8r$
$\frac{17 - 5r + 17 - 5r + 2r + 17 - 5r + 8r}{3} = 12$
$\frac{51 - 5r}{3} = 12$
$51 - 5r = 36$
$-5r = -15$
$r = 3$
$a_1 = 17 - 5 \cdot 3$
$a_1 = 17 - 15$
$a_1 = 2$
$a_3 = 2 + 2 \cdot 3$
$a_3 = 2 + 6$
$a_3 = 8$
ciąg geometryczny
a_1, a_3, a_k
$8^2 = 2 \cdot a_k$
$64 = 2 \cdot a_k$
$a_k = 32$
$8 = 2 \cdot q^{2-1}$
$8 = 2 \cdot q$
$q = 4$
$32 = 2 \cdot 4^{k-1}$
$2^5 = 2 \cdot (2^2)^{k-1}$
$2^5 = 2 \cdot 2^{2k-2}$
$2^5 = 2^{1+2k-2}$
$5 = 1 + 2k - 2$
$5 - 1 + 2 = 2k$
$6 = 2k$
$k = 3$

Część zdających zapisywała w odpowiedzi liczby, które nie były całkowitymi dodatnimi (jak w poniższym przykładzie). To także może potwierdzać przypuszczenie, że niektórzy zdający mieli kłopoty z interpretacją liczby „*k*” w zapisie symbolicznym „ a_k ”.

Przykład 10.


1) $S_{11} = 187$
$S_{11} = \frac{a_1+a_{11}}{2}\cdot 11$
$187 = \frac{a_1+a_1+10r}{2}\cdot 11$
$187 = \frac{2a_1+10r}{2}\cdot 11 \;/:11$
$17 = \frac{2a_1+10r}{2} \;/\cdot 2$
$34 = 2a_1+10r$
$\frac{34-10r}{2} = a_1$

2) $\frac{a_1+a_3+a_9}{3} = 12$
$\frac{a_1+a_1+2r+a_1+8r}{3} = 12$
$\frac{\frac{34-10r}{2}+\frac{34-10r}{2}+2r+\frac{34-10r}{2}+8r}{3} = 12 \;/\cdot 3$
$17+5r+17+5r+2r+17+5r+8r = 36$
$51+25r = 36$
$25r = -15$
$r = -\frac{15}{25} = -\frac{3}{5}$

3) $\frac{34-10\cdot(-\frac{3}{5})}{2} = a_1$
$\frac{34+6}{2} = a_1$
$\frac{40}{2} = a_1$
$20 = a_1$

4) $a_1 = 20$
$a_3 = 20+2r = 20+2\cdot(-\frac{3}{5}) = 20-\frac{6}{5} = \frac{100}{5}-\frac{6}{5} = \frac{94}{5}$
a_k
nowy trzywyrazowy ciąg geometryczny

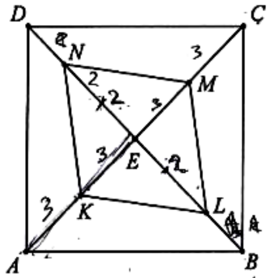
5) $20, \frac{94}{5}, k$ - geometryczny
$\left(\frac{94}{5}\right)^2 = 20k$
$\frac{8836}{25} = 20k \;/\cdot 25$
~~8836 = 100k~~
~~$\frac{8836}{100} = k$~~
$8836 = 500k$
$\frac{8836}{500} = k$

Odpowiedź: k wynosi ~~$\frac{8836}{100}$~~ $\frac{8836}{500}$

Do zadań, w których zdający egzamin na poziomie podstawowym osiągnęli słaby wynik, należy też zadanie 28. z poziomem wykonania 32%. Dotyczyło ono wymagań z obszaru Rozumowanie i argumentacja. Zdający mieli przeprowadzić dowód geometryczny. Ci maturzyści, którzy rozwiązali zadanie, zauważyli i zrozumieli, że dowód polega na zapisaniu pola kwadratu oraz pola czworokąta w zależności od tej samej zmiennej. Prowadzone na różne sposoby poprawne i nietrudne obliczenia (obliczanie pól figur płaskich to przecież umiejętność z zakresu gimnazjum), pozwalały na ogół tej grupie zdających łatwo i szybko udowodnić tezę twierdzenia. Z drugiej jednak strony trzeba zauważyć, że większość zdających nie poradziła sobie z problemem, wykazując brak elementarnych umiejętności, kształconych już na poziomie gimnazjum. Dlaczego tak trudne okazało się dla maturzystów oznaczenie długości boku kwadratu i poprawne wyznaczenie w zależności od tej samej zmiennej pola kwadratu i pola innej figury, np. trójkąta? Część maturzystów wprowadziła do swojego rozwiązania konkretne wartości liczbowe. Jeżeli tylko potrafili przeprowadzić całe rozumowanie, to egzaminatorzy, zgodnie ze schematem, przyznawali im 1 punkt.

Oto przykład takiego rozwiązania.

Przykład 11.



$|AE| = |EC| = |DE| = |BE|$ $\qquad \frac{|DN|}{|NE|} = \frac{1}{2}$ $\qquad |DN| : |DE| = 1:3 \ / \cdot 2 \quad 2:6$

$|AK| : |AE| = 1:2 \ / \cdot 3 \quad 3:6$

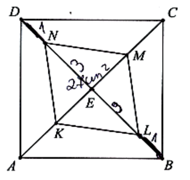
$P_{ABCD} = \frac{|AC| \cdot |DB|}{2} = \frac{(3\cdot 4)\cdot(2\cdot 6)}{2} = \frac{12 \cdot 12}{2} = 72$

$P_{KLMN} = \frac{|KM| \cdot |LN|}{2} = \frac{(2\cdot 3)\cdot(2\cdot 4)}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$

$\frac{24}{72} = \frac{1}{3}$ $\qquad \frac{P_{ABCD}}{P_{KLMN}} = \frac{1}{3}.$

Wśród błędnych rozwiązań były i takie, w których zdający próbowali przemycić tezę twierdzenia, której prawdziwości dowodzili (jak w przykładowych rozwiązaniach poniżej). Takie „dowody" wyglądały zgrabnie, a co ważniejsze, zupełnie nie były potrzebne wówczas dodatkowe założenia zawarte w treści zadania.

Przykład 12.



$\frac{KLMN}{ABCD} = \frac{1}{3}$ $\qquad$ Pole $KLMN = \frac{1}{2} \cdot |LN| \cdot |KM| = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 = 27 (cm^2)$

$\frac{27}{ABCD} = \frac{1}{3}$

$ABCD = 27 \cdot 3$

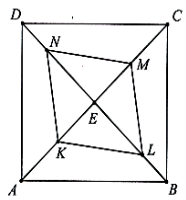
$ABCD = 81$

$\frac{27}{81} = \frac{1}{3}$, po skrócenia przez 3 ułamka pierwszego otrzymamy $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$,

co znaczy, że stosunek tych figur jest $\frac{1}{3}$ c.k.d.

Skoro pole czworokąta KLMN jest równe 27 a pole kwadratu 81, to znaczy, że pole kwadratu jest 3 razy większe od czworokąta KLMN i ma do niego stosunek $\frac{1}{3}$.

Przykład 13.



Stosunek pola czworokąta KLMN do pola kwadratu ABCD jest równy $\frac{1}{3}$, ponieważ odległość wierzchołków kwadratu ABCD od punktu przecięcia się przekątnych wynosi $\frac{2}{3}$ długości połowy przekątnej kwadratu ABCD, co oznacza, że pole tego kwadratu jest 3 razy ~~mniejsze~~ większe od pola czworokąta ~~ABC~~ KLMN

Wyniki matury z matematyki na **poziomie rozszerzonym** wskazują, że najtrudniejszym okazało się zadanie 15., dotyczące wielomianu stopnia trzeciego, którego pierwiastki tworzyły ciąg arytmetyczny. Poziom wykonania tego zadania to zaledwie 16%, zadanie było bardzo trudne dla zdających. Aż 65% zdających nie dokonało przy jego rozwiazywaniu nawet niewielkiego postępu. Na drugim biegunie znajduje się niespełna 6% maturzystów, których rozwiązania były poprawne i kompletne. Rozwiązania niepełne wielokrotnie zawierały znakomity pomysł, aby pierwiastki wielomianu zapisywać w postaci: $p-3$, p, $p+3$. Niestety, w rozwiązaniach często pojawiały się błędy rachunkowe przy przekształcaniu postaci iloczynowej wielomianu do postaci, pozwalającej porównywać współczynniki. To najczęściej powodowało, że otrzymane równanie stopnia trzeciego było trudne do rozwiązania (zob. skan poniżej z przykładem takiego rozwiązania).

Przykład 14.

$1+a+b+c=0 \qquad W(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$x_1+3=x_2, \quad x_2+3=x_3$

$a,b,c=?$

$x_1+x_2+x_3=x_1+x_2+x_2+3=3x_1+9=-\frac{a}{1}=-a$

$x_1+x_2+x_3=3x_2$

$3x_2=-a$

$x_2=\frac{-a}{3}$

$x_1=\frac{-a}{3}-3 \qquad x_3=\frac{-a}{3}+3$

$\frac{b}{1}=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=-\frac{a}{3}\left(\frac{-a}{3}-3+\frac{-a}{3}+3\right)+$

$+\left(\frac{-a}{3}-3\right)\left(\frac{-a}{3}+3\right)=2\left(-\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{-a}{3}\right)^2-9=$

$=3\frac{a^2}{9}-9=\frac{a^2}{3}-9$

$\frac{-c}{1}=x_1x_2x_3=\frac{-a}{3}\left(-\frac{a}{3}-3\right)\left(\frac{-a}{3}+3\right)=\left(\frac{a^2}{9}-9\right)\left(\frac{-a}{3}\right)=$

$=\frac{-a^3}{27}+3a \qquad c=\frac{a^3}{27}-3a$

$a+b+c=a^2+\frac{a^2}{3}-9+\frac{a^3}{27}-3a=-1$

$W(x)=(x-x_2)(x-x_2+3)(x-x_2-3)=$

$=(x-x_2)(x^2-2xx_2+x_2^2-9)=$

$=x^3-2x^2x_2+xx_2^2-9x-x^2x_2+2xx_2^2-x_2^3-9x_2=$

$=x^3+x^2(-2x_2-x_2)+x(x_2^2-9+2x_2^2)-x_2^3-9x_2=$

$=x^3+x^2(-3x_2)+x(3x_2^2-9)-x_2^3-9x_2$

$a=-3x_2 \qquad b=3x_2^2-9 \qquad c=-x_2^3-9x_2$

z poprz. str.

$\frac{a^3}{27}+a^2\cdot\frac{4}{3}+3a-8=0$

Z tego wzoru wyznaczamy wszystkie możliwe a, a z poprz. wzoru na tej podstawie wyznaczamy pozostałe liczby z trójki a, b, c.

$\cancel{a=3}$

Podobnie jak w przypadku poziomu podstawowego przy rozwiązywaniu zadania wymagającego dowodu algebraicznego, także na poziomie rozszerzonym, maturzyści nie osiągnęli zadowalającego wyniku. Mowa tu o zadaniu nr 8:

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność

$$x^4-x^2-2x+3>0.$$

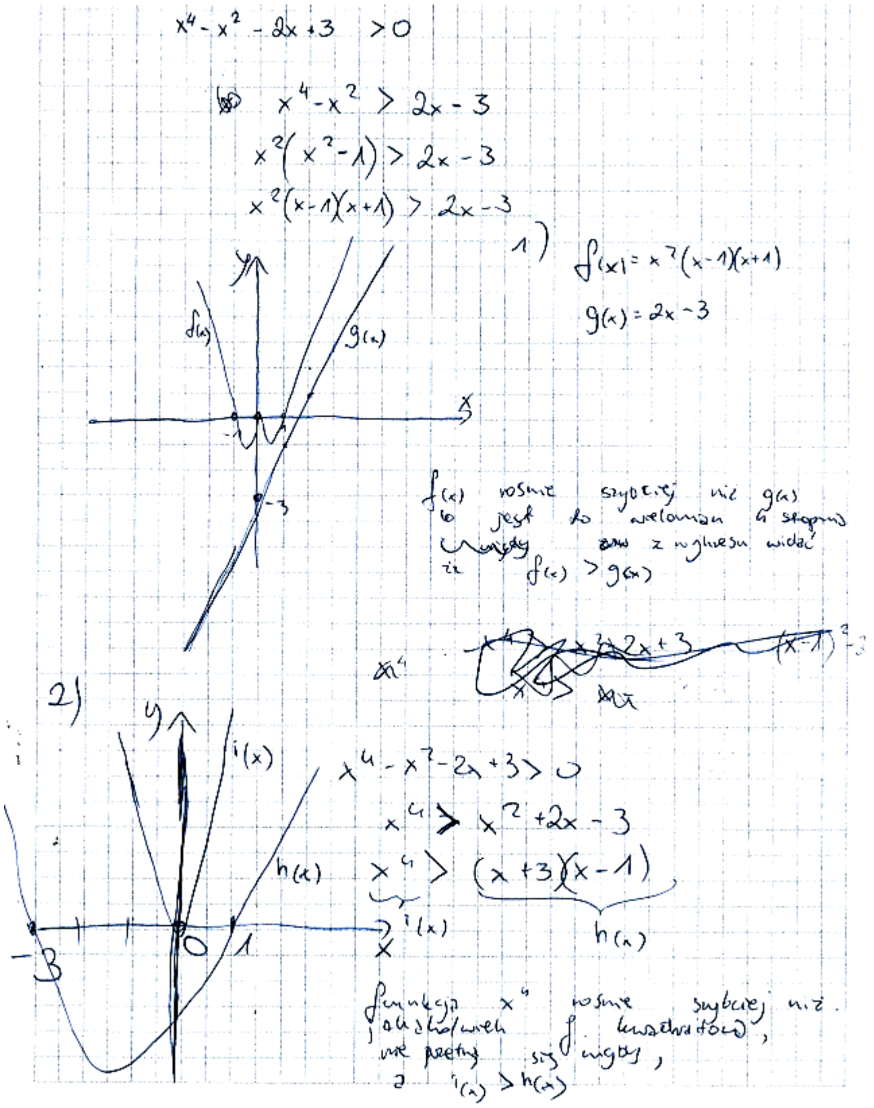
Poziom wykonania tego zadania wynosi 18%, przy czym odsetek zdających, którzy przeprowadzili pełne i poprawne rozumowanie, wyniósł 15%. Efektowne, i co ważniejsze, skuteczne rozwiązania, wykorzystujące odpowiednie grupowania wyrazów i zastosowanie wzorów skróconego mnożenia, przeplatały się tutaj z okazją do zaprezentowania umiejętności wykorzystania rachunku pochodnych.

Wśród błędnych rozwiązań dość często zdarzały się rozumowania, których punktem wyjścia było przyjęcie, że dla „dowodu" tej nierówności wystarczy zapisać ją w postaci równoważnej, na przykład

$$x^4-x^2>2x-3,$$

a następnie zbadać pochodną oraz własności pochodnej funkcji znajdującej się po lewej stronie nierówności, naszkicować wykresy obu funkcji (z lewej i prawej strony nierówności) i zapisać wniosek, że nierówność faktycznie jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej *x*. Ponieważ takie błędne rozwiązania pojawiały się dość często, zamieszczamy stosowny przykład.

Przykład 15.



Nietrudno zapewne zauważyć, że maturzysta nawet nie „dotknął" problemu, który, notabene, sam zdefiniował. Nie zbadał w szczególności, czy istnieją takie punkty, w których styczna do wykresu wielomianu znajdującego się po lewej stronie nierówności ma współczynnik kierunkowy równy 2. Łatwo jest przecież wyznaczyć równanie tej stycznej po to, aby pokazać następnie, jak położony jest wykres tego wielomianu względem prostej opisanej równaniem $y = 2x - 3$.

I jeszcze jeden przykład rozwiązania graficznego, w którym zdający, zamiast dowodzić nierówności, pisze o rzekomym „dużo szybszym wzrastaniu funkcji, opisanej wzorem $f(x) = x^4$, w przedziale $(0, +\infty)$ w porównaniu z funkcją, opisaną wzorem $g(x) = 2x + 2$.

Przykład 16.

$x^4 - x^2 - 2x + 3 > 0$

$x^4 - (x^2 + 2x - 3) > 0$

$x^4 - (x-1)(x+3) > 0$

Aby ~~udowodnić nierówność~~ nierówność była prawdziwa, wykres funkcji $f(x) = x^4$ musi być nad wykresem funkcji $g(x) = x^2 + 2x - 3$ w przedziale R (nie mogą mieć punktów wspólnych)

$g(x)$: ze wz. Viete'a:

$p = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

$q = g(-1) = -4$

$P(-1; -4)$ - wierzchołek paraboli

$g(0) = -3$

$g(1) = g(-3) = 0$

$g(2) = 5$

$f(x)$

$f(0) = 0$

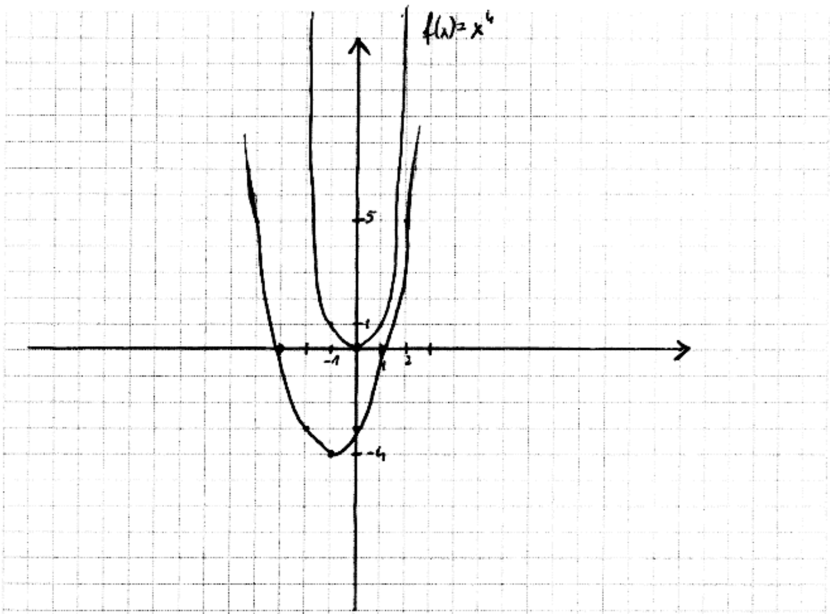
$f(1) = 1 = f(-1)$

$f(2) = 16$

$f(-2) = -16$

$f'(x) = 4x^3$ $\quad g'(x) = 2x + 2$

~~W przedziale~~ W przedziale $(-\infty; 0)$ pochodna $f'(x)$ rośnie na minusach dużo szybciej niż pochodna $g'(x)$. Również w przedziale $(0; \infty)$ pochodna $f'(x)$ rośnie na plusach dużo szybciej niż pochodna $g'(x)$. Zatem na minusach funkcja f maleje dużo szybciej niż funkcja g, natomiast na plusach f rośnie dużo szybciej niż funkcja g.



Na podstawie powyższego rysunku, komentarza oraz sprawdzenia istotnych punktów można stwierdzić, że $f(x) > g(x)$ w R, a zatem prawdziwa jest nierówność $x^4 - x^2 - 2x + 3 > 0$

CKD.

Stosunkowo niskie są także rezultaty osiągnięte przez zdających na poziomie rozszerzonym przy rozwiązywaniu zadań 13. (poziom wykonania – 18%) i 14. (poziom wykonania – 23%).

Zadanie 13. w żadnym wypadku nie mogło być zaskoczeniem dla maturzystów. Należało w nim bowiem odpowiednio dobrać wartość parametru ze wzoru, opisującego trójmian kwadratowy, tak by pierwiastki trójmianu spełniały określony warunek. Ten typ zadania był obecny na każdej z majowych matur, począwszy od 2010 roku. Do rozwiązania tego zadania wystarcza znajomość wzorów Viete'a (poza, co oczywiste, pewną skrupulatnością w zapisywaniu wszystkich założeń oraz w obliczeniach). Tymczasem zdający niepoprawnie rozwiązywali równanie $x_1^2 - x_2^2 = x_1^4 - x_2^4$. Dość popularne, niestety, było dzielenie obu stron tego równania przez $x_1^2 - x_2^2$ bez stosownego założenia, a to powodowało, że nawet poprawne dokończenie takiego rozwiązania dawało zdającemu maksymalnie 3 punkty. Poniższy skan przedstawia takie właśnie rozwiązanie.

Przykład 17.

$x \in \mathbb{R}$

- $m+1 \neq 0 \Rightarrow m \neq -1$, bo musi być f. kwadratowa, a wtedy byłaby liniowa

- $\Delta > 0$ (2 różne pierwiastki) $\quad x_1 \neq x_2$

$[2(m-2)]^2 - 4\cdot(4-m)(m+1) > 0$

$4(m^2-4m+4) + 4(m-4)(m+1) > 0 \qquad m^2-3m-4$

$4m^2-16m+16 + 4m^2-12m-16 > 0$

$8m^2-28m > 0$

$4m(2m-7) > 0$

$\frac{7}{2}$

$m \in (-\infty; 0) \cup (3{,}5; +\infty)$

$x_1+x_2 = \frac{-2(m-2)}{(m+1)}$

$x_1x_2 = \frac{4-m}{m+1}$

- $x_1^2 - x_2^2 = x_1^4 - x_2^4$

$(x_1+x_2)(x_1-x_2) = (x_1^2+x_2^2)(x_1^2-x_2^2)$

$\cancel{(x_1+x_2)}\cancel{(x_1-x_2)} = [(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]\cdot\cancel{(x_1-x_2)}\cancel{(x_1+x_2)}$

$(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1$

$x_1+x_2 = -\frac{2(m-2)}{(m+1)}$ $\qquad (m-4)(m+1)$

$x_1x_2 = \frac{4-m}{m+1}$ $\qquad m^2-3m-4$

$\left(\frac{2(m-2)}{m+1}\right)^2 - 2\cdot\frac{4-m}{m+1} = 1$

$\frac{4(m-2)^2}{(m+1)^2} - 2\cdot\frac{4-m}{m+1} = 1 \qquad /\cdot(m+1)^2$

$4(m-2)^2 - 2\cdot(4-m)(m+1) = (m+1)^2$

$4(m^2-4m+4) + 2(m^2-3m-4) = m^2+2m+1$

$4m^2-16m+16+\cancel{2}m^2-6m-8 = \cancel{m^2}+2m+1$

$5m^2-24m-7=0$

$\Delta = 576+140 = 716 \qquad \begin{matrix}576\\140\end{matrix}$

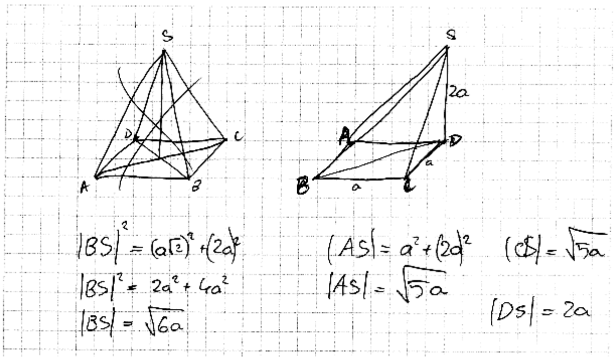
$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{179} \approx 26{,}8 \qquad \begin{array}{r|l}716 & 2\\358 & 2\\179 & \end{array}$

$m_0 = \frac{24\pm2\sqrt{179}}{10}$

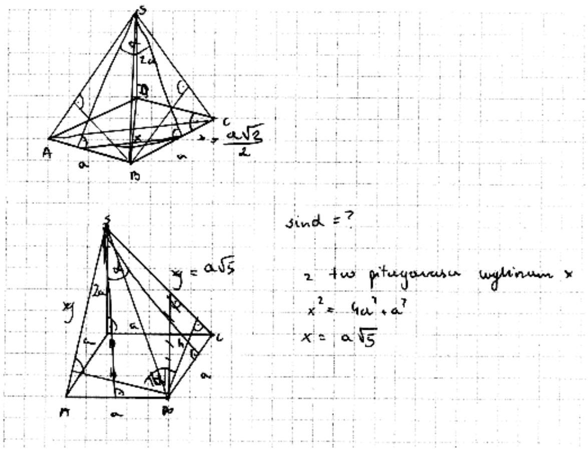
$m = 2{,}4+0{,}2\sqrt{179} \vee m = 2{,}4-0{,}2\sqrt{179}$

Dla większości zdających strategia rozwiązywania tego zadania kończyła się na sprawdzeniu warunku istnienia dwóch różnych pierwiastków trójmianu kwadratowego.
Z kolei przy rozwiązywaniu zadania 14., w którym trzeba było wyznaczyć sinus kąta między ścianami bocznymi ostrosłupa, rozwiązujący mieli szansę wykazać się opanowaniem umiejętności typowej dla stereometrii, tj. posługiwaniem się pojęciem kąta dwuściennego w ostrosłupach. Poprawna część rozwiązania przeważającej większości zdających kończyła się zaznaczeniem właściwego kąta między ścianami *ABS* i *CBS* albo na wyznaczeniem długości krawędzi bocznych ostrosłupa. Pełne rozwiązanie zaprezentowało zaledwie 12% maturzystów, co oznacza, że na poziomie rozszerzonym typowe zadanie stereometryczne okazało się być trudne dla zdających. Stało się tak, mimo że strategia rozwiązywania tego zadania wynikała niemal wprost z jego treści. Zdającym sprawiało kłopot nawet sporządzenie rysunku pomocniczego, rozwiązania kończyły się często na zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa do trójkąta *ADS* (lub trójkąta *CDS*) i wyznaczeniu długości krawędzi bocznych *AS* (lub *CS*) oraz *BS*, jak na skanach poniżej.

Przykład 18.



Przykład 19.



Strategia rozwiązania tego zadania nie została zrealizowana przez większość zdających z powodu nieopanowania przez nich pojęcia kąta dwuściennego w ostrosłupie i nieumiejętnego posługiwania się nim, pomimo że sytuacja opisana w zadaniu była typowa.

Problem „pod lupą”

MODELOWANIE MATEMATYCZNE – TRUDNE DLA MATURZYSTÓW

Warto pochylić się nad zagadnieniem modelowania matematycznego, czyli opisywaniem w języku matematyki przebiegu zjawisk i cech badanych obiektów. Dla zdających maturę z matematyki, zarówno na poziomie podstawowym, jak i rozszerzonym, stanowi to poważne wyzwanie.

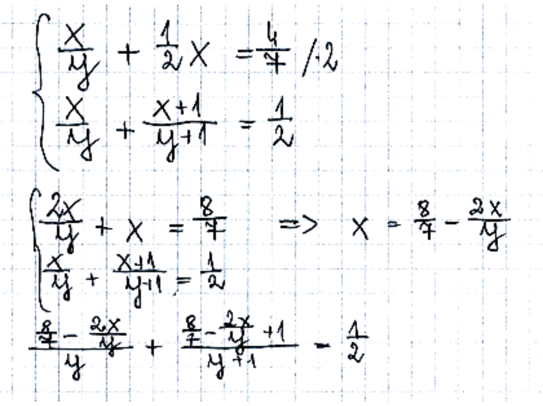
Na przykład w zadaniu 31. z arkusza dla poziomu podstawowego maturzyści osiągnęli poziom wykonania 36%.

Jeżeli do licznika i do mianownika nieskracalnego dodatniego ułamka dodamy połowę jego licznika, to otrzymamy $\frac{4}{7}$, a jeżeli do licznika i do mianownika dodamy 1, to otrzymamy $\frac{1}{2}$. Wyznacz ten ułamek.

Zdający najczęściej budowali układ równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi, następnie rozwiązywali ten układ i zapisywali w odpowiedzi ułamek nieskracalny spełniający warunki opisane w treści zadania. Dużo rzadziej zdarzało się oglądać rozwiązania prowadzone trudniejszą drogą –

poprzez zbudowanie równania stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi i takie jego przekształcenie, aby można było z tego równania od razu wyznaczyć wartość szukanego ułamka nieskracalnego. Wyniki zdających nie mogą nastrajać optymistycznie, tym bardziej, że w pełni poprawnym rozwiązaniem mogło się pochwalić 29% zdających. Kluczowym zagadnieniem okazało się tutaj przełożenie treści zadania na język równań lub układów równań. Trudne dla niektórych zdających było zwłaszcza zapisanie pierwszego zdania w języku równań. Obserwowaliśmy wiele różnych prób takich zapisów. Kilka przykładów nietrafionych pomysłów umieszczamy poniżej.

Przykład 20.

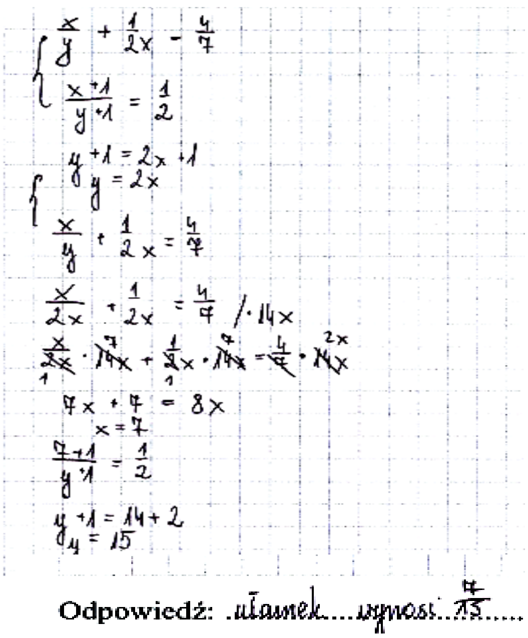


$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{1}{2}x = \frac{4}{7} \;/\cdot 2 \\ \frac{x}{y} + \frac{x+1}{y+1} = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{2x}{y} + x = \frac{8}{7} \Rightarrow x = \frac{8}{7} - \frac{2x}{y} \\ \frac{x}{y} + \frac{x+1}{y+1} = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\frac{\frac{8}{7} - \frac{2x}{y}}{y} + \frac{\frac{8}{7} - \frac{2x}{y} + 1}{y+1} = \frac{1}{2}$

Przykład 21.



$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{1}{2x} = \frac{4}{7} \\ \frac{x+1}{y+1} = \frac{1}{2} \end{cases}$

$y + 1 = 2x + 1$

$\begin{cases} y = 2x \\ \frac{x}{y} + \frac{1}{2x} = \frac{4}{7} \end{cases}$

$\frac{x}{2x} + \frac{1}{2x} = \frac{4}{7} \;/\cdot 14x$

$\frac{x}{2x} \cdot 14x + \frac{1}{2x} \cdot 14x = \frac{4}{7} \cdot 14x$

$7x + 7 = 8x$

$x = 7$

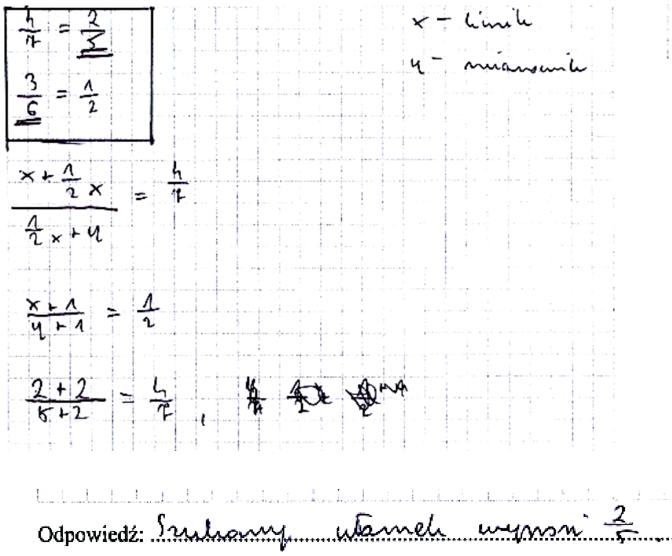
$\frac{7+1}{y+1} = \frac{1}{2}$

$y + 1 = 14 + 2$

$y = 15$

Odpowiedź: ułamek wynosi $\frac{7}{15}$

Przykład 22.



$\boxed{\frac{4}{7} = \frac{2}{5} \qquad \frac{3}{6} = \frac{1}{2}}$

x – licznik

y – mianownik

$\frac{x + \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x + y} = \frac{4}{7}$

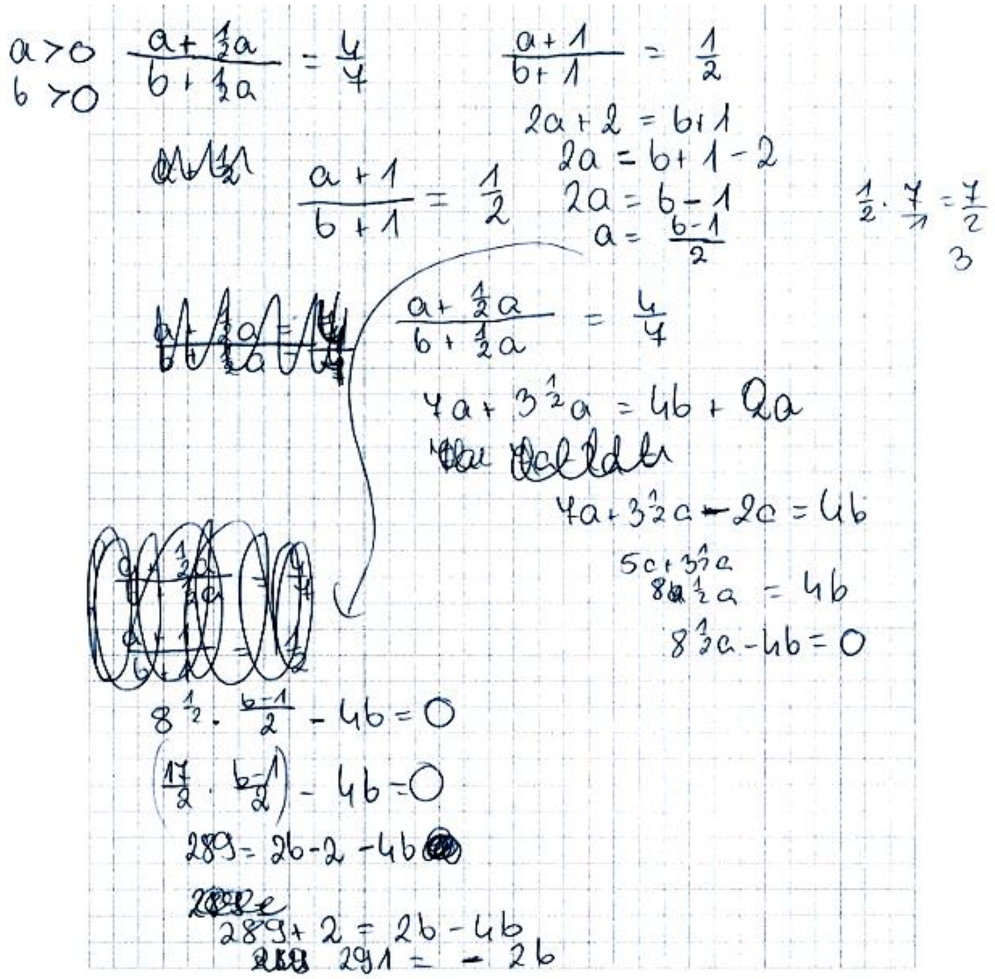
$\frac{x+1}{y+1} = \frac{1}{2}$

$\frac{2+2}{5+2} = \frac{4}{7}$

Odpowiedź: Szukany ułamek wynosi $\frac{2}{5}$

Część zdających była w stanie zbudować odpowiedni do treści zadania model, ale nie poradziła sobie z rozwiązaniem układu równań liniowych. Poniżej przykład takiego rozwiązania.

Przykład 23.



$a>0$

$b>0$

$\frac{a+\frac{1}{2}a}{b+\frac{1}{2}a}=\frac{4}{7}$

$\frac{a+1}{b+1}=\frac{1}{2}$

$2a+2=b+1$

$2a=b+1-2$

$2a=b-1$

$a=\frac{b-1}{2}$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{1}=\frac{7}{2}$

3

$\frac{a+1}{b+1}=\frac{1}{2}$

$\frac{a+\frac{1}{2}a}{b+\frac{1}{2}a}=\frac{4}{7}$

$7a+3\frac{1}{2}a=4b+2a$

$7a+3\frac{1}{2}a-2a=4b$

$5a+3\frac{1}{2}a$

$8\frac{1}{2}a=4b$

$8\frac{1}{2}a-4b=0$

$8\frac{1}{2}\cdot\frac{b-1}{2}-4b=0$

$\left(\frac{17}{2}\cdot\frac{b-1}{2}\right)-4b=0$

$289=2b-2-4b$

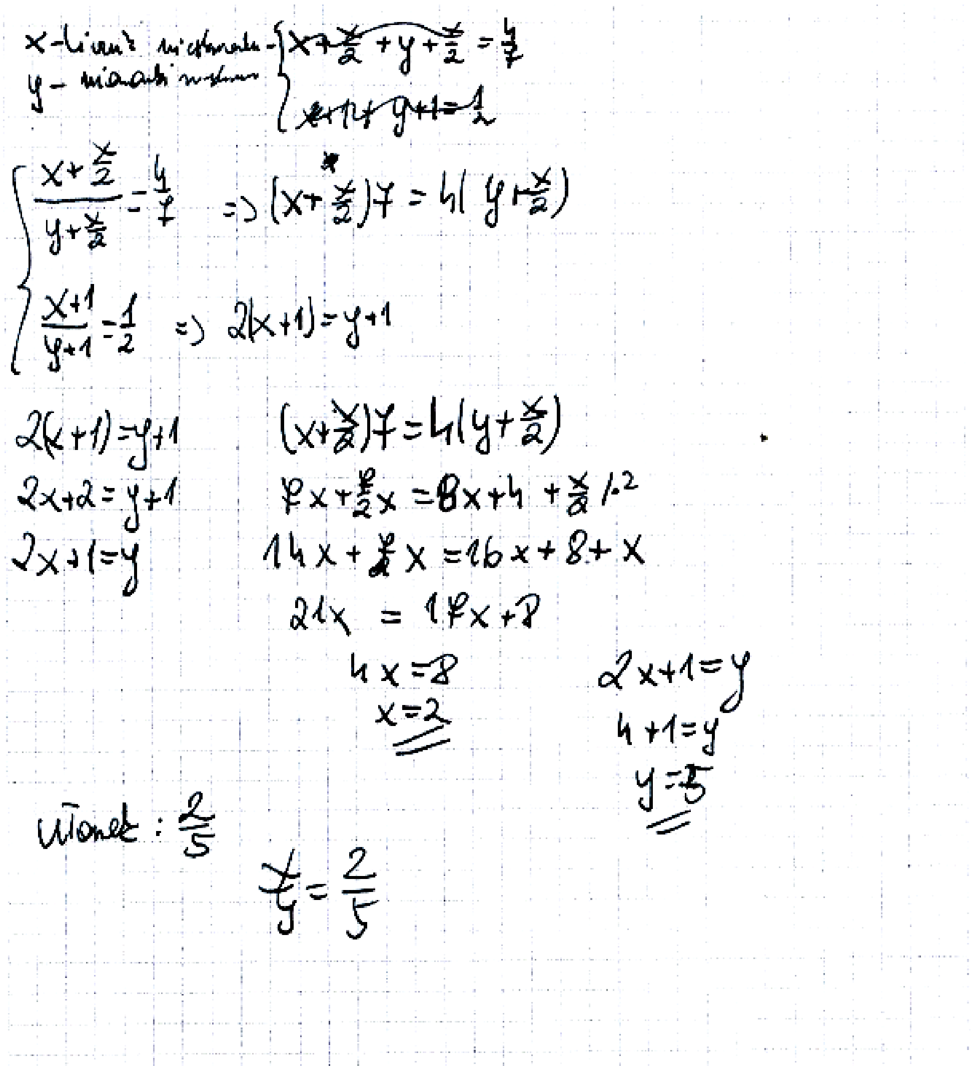
$289+2=2b-4b$

$291=-2b$

Odpowiedź: ....

Podczas analizy rozwiązań przedstawionych przez zdających można zaobserwować w części prac maturalnych brak oceny realności otrzymywanych wyników. Wcale nierzadko maturzyści otrzymywali błędną odpowiedź i często zabrakło nawyku (albo odwagi), aby sprawdzić, czy są spełnione oba warunki opisane w treści tego zadania. Oto przykład błędnego rozwiązania z wynikiem $\frac{2}{5}$.

Przykład 23.



$$\begin{cases} \dfrac{x+\frac{x}{2}}{y+\frac{x}{2}} = \dfrac{4}{7} \Rightarrow (x+\frac{x}{2})7 = 4(y+\frac{x}{2}) \\ \dfrac{x+1}{y+1} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2(x+1) = y+1 \end{cases}$$

$2(x+1) = y+1$

$2x+2 = y+1$

$2x+1 = y$

$(x+\frac{x}{2})7 = 4(y+\frac{x}{2})$

$7x + \frac{7}{2}x = 8x+4+\frac{x}{2} \quad / \cdot 2$

$14x + 7x = 16x + 8 + x$

$21x = 17x + 8$

$4x = 8$

$x = 2$

$2x+1 = y$

$4+1 = y$

$y = 5$

Wynik: $\frac{2}{5}$

$\frac{x}{y} = \frac{2}{5}$

Odpowiedź: Wynik niebieskich to $\frac{2}{5}$

Przykładowym zadaniem, które badało umiejętność zbudowania i zbadania modelu matematycznego na **poziomie rozszerzonym** jest zadanie optymalizacyjne (w arkuszu oznaczone nr. 16):

> Rozpatrujemy wszystkie stożki, których przekrojem osiowym jest trójkąt o obwodzie 20. Oblicz wysokość i promień podstawy tego stożka, którego objętość jest największa. Oblicz objętość tego stożka.

Zagadnienie optymalizacyjne nie było nowością w arkuszu dla poziomu rozszerzonego. Na kolejnych maturach począwszy od 2010 roku takie zadania (treściowo osadzone w funkcjach kwadratowych) były zamieszczane w arkuszach. Teraz do rozwiązania takiego zadania były potrzebne umiejętności zastosowania rachunku pochodnych – nowy dział w podstawie programowej z matematyki. Ponadto, za rozwiązanie zadania 16. można było uzyskać najwięcej punktów spośród wszystkich zadań z arkusza maturalnego – tj. 7 punktów (3 punkty za zbudowanie modelu, 3 punkty za zbadanie tego modelu oraz 1 punkt za końcowe obliczenia). Niestety, poziom wykonania zadania – 30% – oznacza, że zdający słabo opanowali sprawdzane umiejętności.

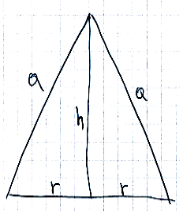
W zadaniu należało zbudować model, będący funkcją jednej zmiennej, opisującą objętość stożka. Wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa oraz danego obwodu trójkąta wystarczyło, aby objętość uzależnić od promienia podstawy stożka (albo od wysokości stożka).

Przy rozwiązywaniu tego zadania powtarzały się najczęściej dwa błędy, ale za to szczególnej wagi dla poprawności prowadzonych rozumowań w zagadnieniach optymalizacyjnych.

Pierwszy z nich to źle określana albo wręcz pomijana dziedzina budowanej funkcji. Drugi to nieprawidłowe uzasadnienie albo pomijanie uzasadnienia, że maksimum lokalne zbudowanej funkcji jest jednocześnie największą wartością tej funkcji.

Można nawet zaryzykować dość gorzkie stwierdzenie, że dla wielu zdających, zadanie optymalizacyjne stało się okazją do realizacji pewnego algorytmu: zbudowanie funkcji – wyznaczenie pochodnej tej funkcji – obliczenie miejsc zerowych pochodnej – zapisanie odpowiedzi końcowej. Tak bardzo odzierano to zagadnienie z elementów rozumowania – w zapisach rozwiązań pozostawała czysta algebra. Przykładem niech będzie poniższe rozwiązanie.

Przykład 24.



$2a + 2r = 20$

$a + r = 10 \Rightarrow a = 10 - r$

$a^2 = h^2 + r^2$

$100 - 20r + \cancel{r^2} = h^2 + \cancel{r^2}$

$20r = 100 - h^2$

$r = 5 - \frac{1}{20}h^2$

$V_5 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \cancel{\frac{1}{3}\pi\left(25 - 2h^2 + \frac{1}{25}h^4\right)h} = \frac{1}{3}\pi(25$

$\cancel{= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{25}h^5 - 2h^3 + 25h\right) = V_5(h)}$

$V'(h) = \frac{1}{5}h^4 - 6h^2 + 25$

$V'(h) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}h^4 - 6h^2 + 25 = 0$

$h^4 - 30h^2 + 125 = 0$

$\Delta = 900 - 500 = 400 = 20^2$

$h^2 = \frac{30 - 20}{2} = 5 \lor h^2 = \frac{30 + 20}{2} = 25$

$h = \sqrt{5} \lor h = -\sqrt{5}$, źle, bo $h > 0$ $\lor$ $h = 5 \lor h = -5$, źle, bo $h > 0$

$h = \sqrt{5} \lor h = 5$

$r = 5 - \frac{1}{5} \cdot 5 = 4 \lor r = 5 - \frac{1}{5} \cdot 25 = 5 - 5 = 0$, źle

Zatem $h = \sqrt{5}$, a $r = 4$.

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 16 \cdot \sqrt{5}$

$V_5 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(25 - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{400}h^4\right)h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{400}h^5 - \frac{1}{2}h^3 + 25h\right) = V_5(h)$

$V_5'(h) = \left(\frac{1}{80}h^4 - \frac{3}{2}h^2 + 25\right) \cdot \frac{1}{3}\pi$

$V_5'(h) = 0 \Leftrightarrow h^4 - 120h^2 + 2000 = 0$

$\Delta = 14400 - 8000 = 6400 = 80^2$

$h^2 = \frac{120 - 80}{2} = 20 \lor h^2 = 100$

$h = 2\sqrt{5} \lor h = -2\sqrt{5}$ źle, bo $h > 0$ $\lor$ $h = 10 \lor h = -10$, źle, $h > 0$

zatem $h = 2\sqrt{5} \lor h = 10$

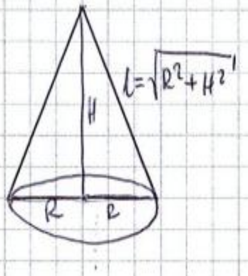
$r = 5 - \frac{1}{20} \cdot 20 = 4 \lor h = 5 - \frac{1}{20} \cdot 100 < 0$ źle

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 16 \cdot 2\sqrt{5} = \frac{32\sqrt{5} \cdot \pi}{3}$

Odpowiedź: $V = \frac{32\sqrt{5} \cdot \pi}{3}$, $r = 4$, $h = 2\sqrt{5}$.

I jeszcze jeden przykład takiego rozwiązania, w którym brak zarówno określenia dziedziny funkcji, jak i przedstawienia głębszego rozumowania, dotyczącego przyjmowania przez funkcję maksymalnej wartości. Tym razem objętość jest funkcją promienia podstawy stożka.

Przykład 25.



$l=20$

$H=?$

$R=?$

V - max

$V=?$

$V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot H$

$l=\sqrt{R^2+H^2}$

$2R+2l=20$

$2R+2\sqrt{R^2+H^2}=20$

$R+\sqrt{R^2+H^2}=10$

$\sqrt{R^2+H^2}=10-R \quad /^2$

$\cancel{R^2}+H^2=100-20R+\cancel{R^2}$ $\quad R=\frac{100}{20}-\frac{1}{20}H^2$

$H=\sqrt{100-20R}$

$V=\frac{1}{3}\pi R^2\sqrt{100-20R}=\frac{1}{3}\pi\sqrt{100R^4-20R^5}$

Rozpatrzmy pomocniczo funkcję ~~max wartość~~ (z monotoniczności funkcji)

$f(R)=100R^4-20R^5$

$f'(R)=400R^3-100R^4$

$f'(R)=0 \iff 400R^3-100R^4=0$

$100R^3(4-R)=0$

$R_1=0$ nie, bo $R>0$ $\quad \underline{R_2=4}$

$R=4 \Rightarrow H=\sqrt{100-20\cdot 4}=\sqrt{20}=\underline{2\sqrt{5}}$

$V=\frac{1}{3}\pi\cdot 16\cdot 2\sqrt{5}=\frac{32}{3}\pi\sqrt{5}$

Odpowiedź: $V=\frac{32}{3}\pi\sqrt{5}$, $R=4$, $H=2\sqrt{5}$

Sformułowana powyżej uwaga o pomijaniu przez zdających rozumowania w rozwiązaniu zadania optymalizacyjnego jest niezwykle ważna z punktu widzenia nauczania matematyki w zakresie rozszerzonym.

Wnioski i rekomendacje

Wyniki egzaminu maturalnego wskazują, że do zadań rozwiązywanych z dobrymi rezultatami należą przede wszystkim te, które nie wymagają zbyt wielu etapów rozwiązania ani starannego wyboru strategii. Podkreślić należy, że w osiągnięciu zadowalających wyników nie przeszkadza osadzenie pojęć czy własności obiektów w szerszym kontekście. Wśród zadań łatwych dla zdających dominują te odwołujące się do elementarnych umiejętności, przy czym należą do nich także zadania wymagające kilku czynności czy umiejętności. Dobre opanowanie rozumienia pojęć i stosowania własności dotyczy różnych obszarów matematyki: statystyki, geometrii, algebry.

Trudności sprawiają zdającym przede wszystkim zadania, wymagające wieloetapowych rozwiązań. Przy tym trzeba zaznaczyć, że pojawiają się tendencje do schematycznego rozwiązywania problemów i próby mechanicznej algorytmizacji rozwiązań, nawet kosztem poprawności rozumowania. Wśród zadań trudnych tradycyjnie wyróżniają się te z dowodami algebraicznymi. O uzyskaniu niezadowalających wyników często decyduje brak opanowania umiejętności przypisanych do niższych poziomów edukacyjnych, szczególnie do gimnazjum.

Średnie wyniki procentowe na poziomie podstawowym oraz na poziomie rozszerzonym wyniosły, odpowiednio 54% i 39%, i nie odbiegają od wyników w poprzednich latach. Wyniki z matury na poziomie podstawowym wskazują na wyodrębnienie się silnych dwóch grup zdających: maturzystów, którzy chcą matematykę zdać oraz maturzystów, którzy chcą osiągnąć z matematyki jak najlepszy wynik. Stąd duża liczba osób, które uzyskały wynik na poziomie 30%–50% oraz duża liczba osób z wysokim wynikiem powyżej 90%.

Analiza rozwiązań uczniowskich, zarówno na poziomie podstawowym jak i rozszerzonym, pozwala zauważyć kilka zjawisk, którym warto poświęcić szczególną uwagę, w odniesieniu do doskonalenia metod nauczania matematyki.

Rażącą przypadłością, dającą się zaobserwować na egzaminie z matematyki, jest bezrefleksyjne podawanie wyników, np. zapisywanie w odpowiedzi ułamka, w zadaniu, w którym wynikiem końcowym musi być liczba całkowita; formułowanie odpowiedzi bez sprawdzenia czy otrzymane wyniki spełniają warunki zadania. Receptą na zwalczanie tego niepożądanego zjawiska może być wymaganie od uczniów konieczności sprawdzenia otrzymanego wyniku z warunkami zadania. Dobrze byłoby kształtować świadomość, że sprawdzenie sensowności końcowego rezultatu stanowi część rozwiązania.

Częstym zjawiskiem, ujawniającym się w wynikach egzaminu maturalnego z matematyki, jest niedostateczne rozumienie pojęć i braki w opanowaniu umiejętności, przypisanych w podstawie programowej do niższych etapów edukacyjnych, zwłaszcza gimnazjum. Niezwykle ważne pozostaje rzetelne diagnozowanie przez nauczycieli szkół ponadgimnazjalnych stopnia opanowania właściwych umiejętności przez absolwentów gimnazjów, a także, w miarę możliwości organizowanie dodatkowych zajęć, pozwalających na wyeliminowanie braków powstałych na wcześniejszych etapach kształcenia.

Poważne trudności sprawiają na maturze z matematyki zadania wymagające przeprowadzenia rozumowania, prowadzącego do uzasadnienia prawdziwości twierdzenia lub własności obiektów matematycznych, szczególnie z zakresu algebry. Przed nauczycielami stoi nie lada wyzwanie oswajania uczniów z tego typu zagadnieniami, tak by zmniejszać liczbę osób unikających zadań ze sformułowaniami „wykaż, że”, „udowodnij” itp. Dobrym sposobem może być na początek wprowadzanie takich sformułowań do zadań, wymagających zastosowania w rozwiązaniu jedynie metod dobrze opanowanych przez uczniów. Podkreślić trzeba, że opisu rozumowania i analizowania konkretnych własności oraz zapisania wyciąganych wniosków wraz z uzasadnieniem wymagają nie tylko zadania zawierające sformułowania z bezpośrednim oczekiwaniem objaśnień. Niezwykle ważne jest, by kształtować u uczniów świadomość, że rozwiązanie zadania to nie tylko ciąg równoważnych równań lub prowadzenie obliczeń, ale także rzetelne wytłumaczenie zależności, opis wnioskowania i słowne uzasadnienia poprawności rozumowania. Nauczyciel powinien wskazywać miejsca, w których brak stosownego zapisu obniża wartość rozwiązania lub wręcz je dyskwalifikuje.

Szczególne miejsce w nauczaniu matematyki należy poświęcić zagadnieniom wieloetapowym. Jak wskazują wyniki matury największą trudność stanowią zadania wymagające opracowania i zrealizowania kilkuetapowej strategii. Umiejętność opracowania i przeprowadzenia logicznego ciągu następujących po sobie działań jest sprawnością nie do przecenienia, a matematyka jest jedną z tych dziedzin, które w naturalny sposób mogą pomóc w kształtowaniu tej umiejętności. W przypadku uczniów przejawiających szczególne opory w przełamywaniu barier w rozwiązywaniu zagadnień kilkuetapowych można częściej tak dobierać problemy, by niektóre kroki na drodze do rozwiązania należały do szczególnie lubianych i dobrze opanowanych przez uczniów.

Na koniec należy podkreślić, że ogromną zasługą nauczycieli jest to, że do zadań najłatwiejszych dla zdających, pozwalających osiągać najlepsze rezultaty, należą także zadania wymagające nie tylko elementarnych umiejętności i rozumienia pojedynczych pojęć, ale osadzone w szerszym kontekście, wymuszające podjęcie kilku działań, pozwalające na zastosowanie kilku umiejętności. Powtórzenie tego zjawiska w kolejnych edycjach matury byłoby bardzo pożądane.

Matematyka – formuła do roku 2014

Poziom podstawowy

1. Opis arkusza

Arkusz egzaminacyjny z matematyki na poziomie podstawowym składał się z 25 zadań zamkniętych wyboru wielokrotnego oraz 9 zadań otwartych, w tym 6 zadań krótkiej odpowiedzi i 3 zadań rozszerzonej odpowiedzi. Zadania sprawdzały wiadomości oraz umiejętności w pięciu obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych: Wykorzystanie i tworzenie informacji (3 zadania zamknięte, 1 zadanie otwarte krótkiej odpowiedzi), Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (17 zadań zamkniętych, 2 zadania otwarte krótkiej odpowiedzi), Modelowanie matematyczne (3 zadania zamknięte, 1 zadanie otwarte krótkiej odpowiedzi i 2 zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi), Użycie i tworzenie strategii (2 zadania zamknięte, 1 zadanie otwarte rozszerzonej odpowiedzi) oraz Rozumowanie i argumentacja (2 zadania otwarte krótkiej odpowiedzi). Za rozwiązanie wszystkich zadań zdający mógł otrzymać 50 punktów.

2. Dane dotyczące populacji zdających

Tabela 11. Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym*

Liczba zdających		
Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym	**ogółem**	**2772**
	z liceów ogólnokształcących	120
	z liceów profilowanych	1
	z techników	2595
	z liceów uzupełniających	0
	z techników uzupełniających	56
	ze szkół na wsi	75
	ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców	598
	ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	1215
	ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców	884
	ze szkół publicznych	2690
	ze szkół niepublicznych	82
	kobiety	1188
	mężczyźni	1584
	bez dysfunkcji	2620
	z dysleksją rozwojową	152

* Dane w tabeli dotyczą wszystkich tegorocznych absolwentów.

Z egzaminu zwolniono 0 uczniów − laureatów i finalistów Olimpiady Matematycznej.

Tabela 12. Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych

Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych	z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera	1
	słabowidzący	1
	niewidomi	0
	słabosłyszący	4
	niesłyszący	1
	ogółem	**7**

Do egzaminu przystąpili również absolwenci z lat ubiegłych, którzy dotychczas nie uzyskali świadectwa dojrzałości, oraz tacy, którzy uzyskali świadectwo dojrzałości we wcześniejszych latach, a w 2015 r. przystąpili ponownie do egzaminu maturalnego w celu podwyższenia wyniku egzaminacyjnego.

Przebieg egzaminu

Tabela 13. . Informacje dotyczące przebiegu egzaminu (w okręgu OKE we Wrocławiu)

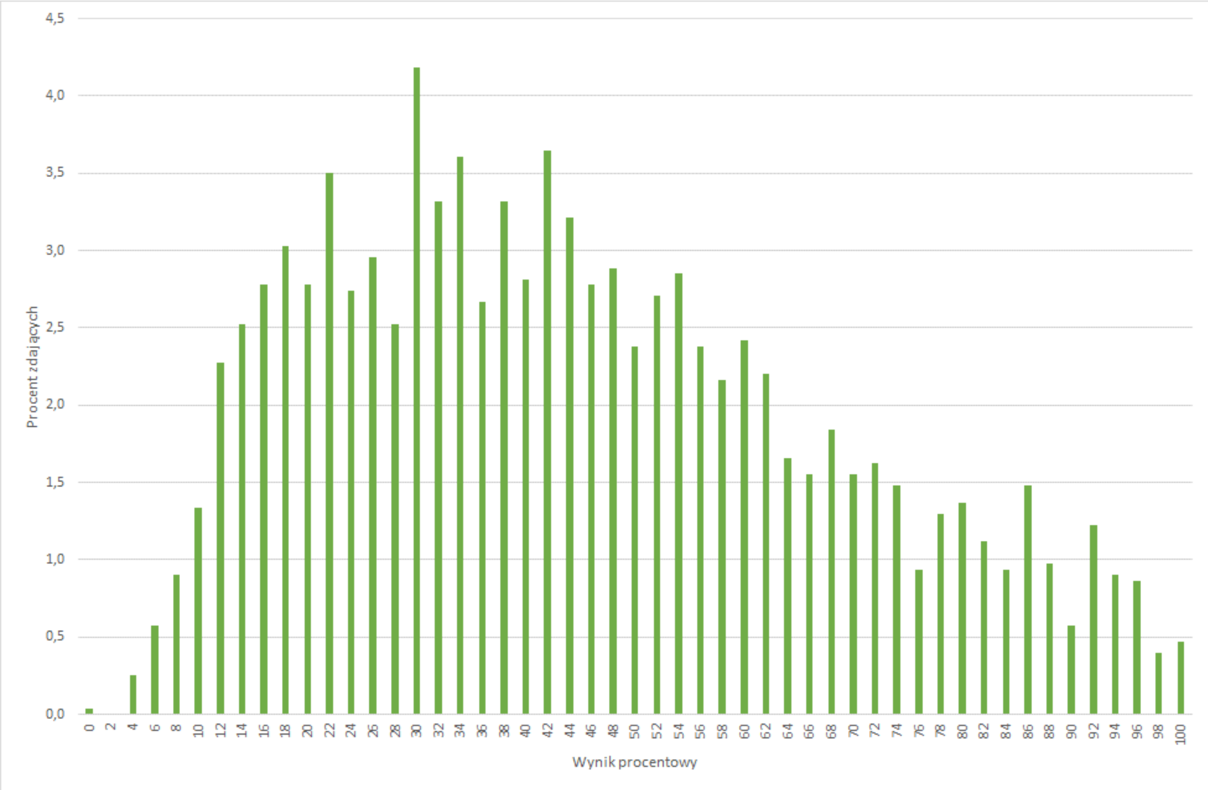
<table>
<tr><td colspan="3">Termin egzaminu</td><td>5 maja 2015 r.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Czas trwania egzaminu</td><td>170 minut</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba szkół</td><td>369</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba zespołów egzaminatorów*</td><td>14</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba egzaminatorów*</td><td>336</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba obserwatorów[3] (§ 143)**</td><td>32</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Liczba unieważnień[3]</td><td colspan="3">w przypadku:</td></tr>
<tr><td rowspan="3">§ 99 ust. 1</td><td>stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego</td><td>0</td></tr>
<tr><td>wniesienia lub korzystania przez zdającego w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego</td><td>1</td></tr>
<tr><td>zakłócenia przez zdającego prawidłowego przebiegu części egzaminu w sposób utrudniający pracę pozostałym zdającym</td><td>0</td></tr>
<tr><td>§ 99 ust. 2</td><td>stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego</td><td>2</td></tr>
<tr><td>§ 146 ust. 3</td><td>stwierdzenia naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzenia egzaminu</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba wglądów[3] (§ 107)**</td><td>403</td></tr>
</table>

* Dane dotyczą obu poziomów egzaminu (podstawowego i rozszerzonego) łącznie.
** Dane dotyczą „nowej formuły” i „starej formuły” łącznie.

[3] Na podstawie rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 30 kwietnia 2007 r. w sprawie warunków i sposobu oceniania, klasyfikowania i promowania uczniów i słuchaczy oraz przeprowadzania sprawdzianów i egzaminów w szkołach publicznych (Dz.U. nr 83, poz. 562, ze zm.)

3. Podstawowe dane statystyczne

Wyniki zdających



Wykres 5. Rozkład wyników zdających

Tabela 14. Wyniki zdających – parametry statystyczne*

Zdający:	Liczba zdających	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)	Odsetek sukcesów**
Ogółem	2772	0	100	42	30	45	23	73***
w tym:								
z liceów ogólnokształcących	120	4	96	38	22	32	23	46
z liceów profilowanych	1	-	-			-		-
z techników	2595	0	100	42	30	46	23	75
z techników uzupełniających	56	-	-			-	-	-
bez dysfunkcji	2620	0	100	42	30	45	23	73
z dysleksją rozwojową	152	10	100	42	30	46	23	76

* Dane w tabeli dotyczą tegorocznych absolwentów. Parametry statystyczne podawane są dla grup liczących 100 lub więcej zdających.
** Dane dotyczą tegorocznych absolwentów, którzy przystąpili do wszystkich egzaminów obowiązkowych.
*** Stan na 30 czerwca 2015 r. Po egzaminie poprawkowym (w sierpniu) ogólny odsetek sukcesów wyniósł 74%.

Poziom wykonania zadań

Tabela 15. Poziom wykonania zadań

Nr zad.	Obszar standardów	Sprawdzana umiejętność	Poziom wykonania zadania (%)
1.	Modelowanie Matematyczne.	1. Liczby rzeczywiste. 1.d) Zdający stosuje pojęcia procentu i punktu procentowego w obliczeniach.	64
2.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. 1.f) Zdający wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometrycznej, zaznacza na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności typu: $\|x-a\|=b$, $\|x-a\|>b$, $\|x-a\|<b$.	71
3.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. 1.g) Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych oraz stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych i rzeczywistych.	62
4.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. 1.h) Zdający zna definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.	42
5.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. 2.f) Zdający dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne.	52
6.	Wykorzystanie i tworzenie informacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. 2.d) Zdający wyznacza dziedzinę prostego wyrażenia wymiernego z jedną zmienną, w którym w mianowniku występują tylko wyrażenia dające się sprowadzić do iloczynu wielomianów liniowych i kwadratowych.	54
7.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. 3.e) Zdający rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3}=2$, $\frac{x+1}{x}=2x$.	67
8.	Wykorzystanie i tworzenie informacji.	4. Funkcje. 4.b,e) Zdający odczytuje z wykresu funkcji miejsca zerowych oraz sporządza wykresy funkcji liniowych.	61
9.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. 4.f) Zdający wyznacza wzór funkcji liniowej.	65
10.	Wykorzystanie i tworzenie informacji.	4. Funkcje. 4.g) Zdający wykorzystuje interpretację współczynników we wzorze funkcji liniowej.	58
11.	Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. 5.c) Zdający stosuje wzór na *n*-ty wyraz i sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego.	73

12.	Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. 5.c) Zdający stosuje wzór na *n*-ty wyraz i sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego.	45
13.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	6. Trygonometria. 6.a) Zdający wykorzystuje definicję i wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów ostrych.	56
14.	Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. 6.d) Zdający znając wartość jednej z funkcji trygonometrycznych wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.	78
15.	Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. 7.c) Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich.	33
16.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	7. Planimetria. 7.b) Zdający wykorzystuje własności figur podobnych w zadaniach.	69
17.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. 8.c) Zdający badanie równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych.	61
18.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. (8.b) Zdający podaje równanie prostej, mając dane dwa jej punkty.	62
19.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. 8.e) Zdający oblicza odległości punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej.	63
20.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. 8.f) Zdający wyznacza współrzędne środka odcinka.	56
21.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. 8.g) Zdający posługuje się równaniem okręgu.	62
22.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	9. Stereometria. 9.b) Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach z zastosowaniem trygonometrii.	53
23.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	9. Stereometria. 9.b) Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach z zastosowaniem trygonometrii.	59
24.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. 10.a) Zdający oblicza średnią arytmetyczną, średnią ważoną, medianę i odchylenie standardowe zestawu danych.	80
25.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. 10.d) Zdający wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń.	61
26.	Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. 2.a) Zdający posługuje się wzorami skróconego mnożenia.	3
27.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. 3.a) Zdający rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe; zapisuje rozwiązanie w postaci sumy przedziałów.	52
28.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. 3.d) Zdający rozwiązuje równania wielomianowe metodą rozkładu na czynniki.	42

29.	Wykorzystanie i tworzenie informacji.	4. Funkcje. 4.b,d) Zdający odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę i zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały w których funkcja rośnie, maleje, ma stały znak, szkicuje na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ wykresy funkcji $y = f(x+a)$, $y = f(x)+a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$.	21
30.	Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. 5.c) Zdający stosuje wzór na *n*-ty wyraz i sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego.	65
31.	Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. 7.a) Zdający korzysta ze związków między kątem środkowym, kątem wpisanym i kątem między styczną a cięciwą okręgu.	17
32.	Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. 9.b) Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach z zastosowaniem trygonometrii.	23
33.	Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. 10.d) Zdający wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń.	36
34.	Modelowanie matematyczne.	3. Równania i nierówności. 3.b) Rozwiązywanie zadań (również umieszczonych w kontekście praktycznym), prowadzących do równań i nierówności kwadratowych.	19

Poziom rozszerzony

1. Opis arkusza

Arkusz egzaminacyjny z matematyki na poziomie rozszerzonym zawierał 11 zadań otwartych, w tym 6 zadań krótkiej i 5 zadań rozszerzonej odpowiedzi. Zadania sprawdzały wiadomości oraz umiejętności opisane w czterech obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych: Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (1 zadanie otwarte krótkiej odpowiedzi), Modelowanie matematyczne (2 zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi), Użycie i tworzenie strategii (3 zadania otwarte krótkiej odpowiedzi i 3 zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi) oraz Rozumowanie i argumentacja (2 zadania otwarte krótkiej odpowiedzi). Za rozwiązanie wszystkich zadań zdający mógł otrzymać 50 punktów.

2. Dane dotyczące populacji zdających

Tabela 16. Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym*

Liczba zdających		
Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym	**ogółem**	**179**
	z liceów ogólnokształcących	5
	z liceów profilowanych	0
	z techników	173
	z liceów uzupełniających	0
	z techników uzupełniających	1
	ze szkół na wsi	1
	ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców	15
	ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	65
	ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców	98
	ze szkół publicznych	178
	ze szkół niepublicznych	1
	kobiety	18
	mężczyźni	161
	bez dysfunkcji	166
	z dysleksją rozwojową	13

* Dane w tabeli dotyczą wszystkich tegorocznych absolwentów.

Z egzaminu zwolniono 0 uczniów − laureatów i finalistów Olimpiady Matematycznej.

Tabela 17. Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych

Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych	z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera	0
	słabowidzący	0
	niewidomi	0
	słabosłyszący	1
	niesłyszący	0
	ogółem	**1**

Do egzaminu przystąpili również absolwenci z lat ubiegłych, którzy dotychczas nie uzyskali świadectwa dojrzałości, oraz tacy, którzy uzyskali świadectwo dojrzałości we wcześniejszych latach, a w 2015 r. przystąpili ponownie do egzaminu maturalnego w celu podwyższenia wyniku egzaminacyjnego albo uzyskania wyniku z matematyki jako nowego przedmiotu.

3. Przebieg egzaminu

Tabela 18. . Informacje dotyczące przebiegu egzaminu (w okręgu OKE we Wrocławiu)

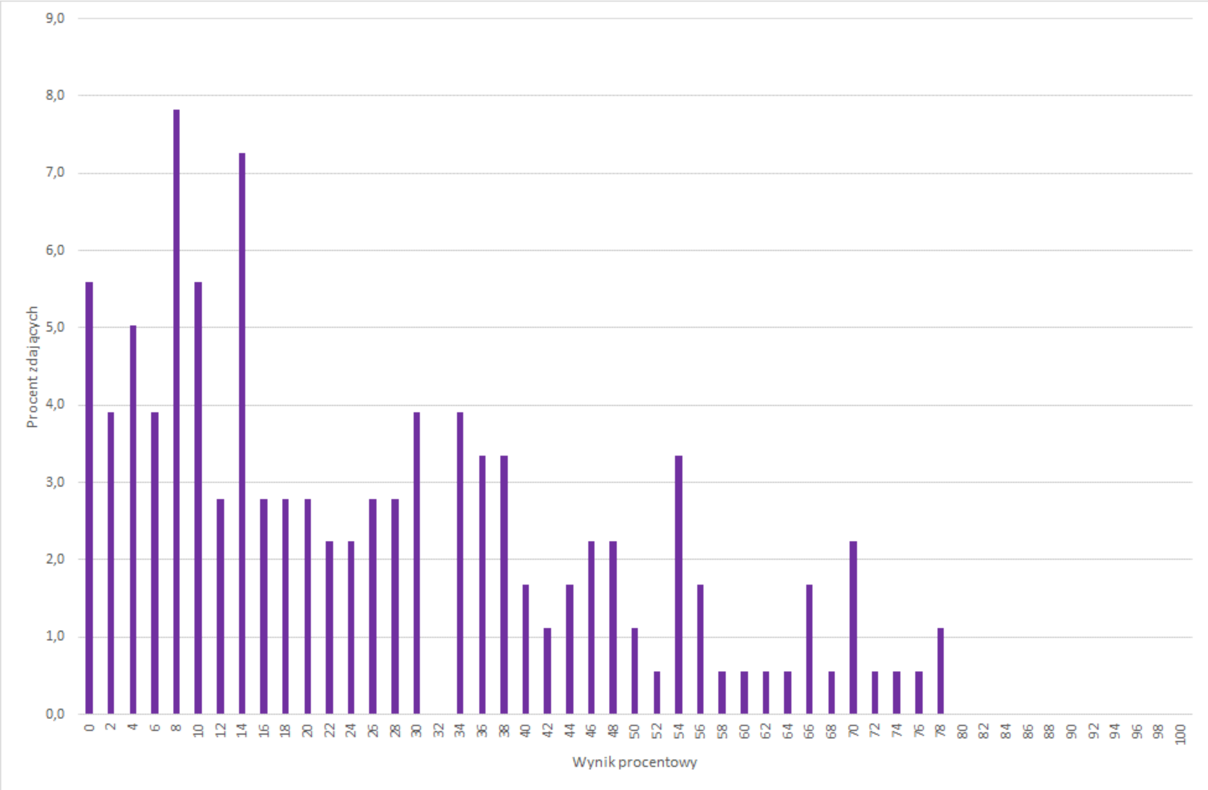
<table>
<tr><td colspan="3">Termin egzaminu</td><td>8 maja 2015 r.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Czas trwania egzaminu</td><td>180 minut</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba szkół</td><td>261</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba zespołów egzaminatorów*</td><td>14</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba egzaminatorów*</td><td>336</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba obserwatorów[4] (§ 143)**</td><td>10</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Liczba unieważnień[4]</td><td colspan="3">w przypadku:</td></tr>
<tr><td rowspan="3">§ 99 ust. 1</td><td>stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego</td><td>0</td></tr>
<tr><td>wniesienia lub korzystania przez zdającego w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego</td><td>0</td></tr>
<tr><td>zakłócenia przez zdającego prawidłowego przebiegu części egzaminu w sposób utrudniający pracę pozostałym zdającym</td><td>0</td></tr>
<tr><td>§ 99 ust. 2</td><td>stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego</td><td>0</td></tr>
<tr><td>§ 146 ust. 3</td><td>stwierdzenia naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzenia egzaminu</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba wglądów[4] (§ 107)**</td><td>90</td></tr>
</table>

* Dane dotyczą obu poziomów egzaminu (podstawowego i rozszerzonego) łącznie.
** Dane dotyczą „nowej formuły" i „starej formuły" łącznie.

[4] Na podstawie rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 30 kwietnia 2007 r. w sprawie warunków i sposobu oceniania, klasyfikowania i promowania uczniów i słuchaczy oraz przeprowadzania sprawdzianów i egzaminów w szkołach publicznych (Dz.U. nr 83, poz. 562, ze zm.)

4. Podstawowe dane statystyczne

Wyniki zdających



Wykres 6. Rozkład wyników zdających

Tabela 19. Wyniki zdających – parametry statystyczne

Zdający	Liczba zdających	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
ogółem	179	0	78	20	8	26	21

Poziom wykonania zadań

Tabela 20. Poziom wykonania zadań

Nr zad.	Obszar standardów	Sprawdzana umiejętność	Poziom wykonania zadania (%)
1	Rozumowanie i argumentacja.	1. Liczby rzeczywiste. R1.b) Zdający stosuje wzór na logarytm potęgi i wzór na zamianę podstawy logarytmu.	34
2	Modelowanie matematyczne.	2. Wyrażenia algebraiczne. R2.c) Zdający stosuje twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych.	21
3	Użycie i tworzenie strategii.	3. Równania i nierówności. R3.b) Zdający rozwiązuje równania i nierówności kwadratowych parametrem, przeprowadza dyskusje i wyciąga z niej wnioski.	31
4	Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. 5.b,c) Zdający bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny, stosuje wzory na n-ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również w kontekście praktycznym.	40
5	Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. R6.e) Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne.	20
6	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. 3.e) Zdający rozwiązuje proste równania i nierówności z wartością bezwzględną.	40
7	Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. 7.c) Zdający wyznacza związki miarowe w figurach płaskich.	30
8	Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. R7.d) Zdający wyznacza związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.	21
9	Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. R8.b) Zdający rozwiązuje zadania dotyczące wzajemnego położenia prostej i okręgu oraz dwóch okręgów na płaszczyźnie kartezjańskiej.	31
10	Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. 9.b) Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach z zastosowaniem trygonometrii.	0
11	Użycie i tworzenie strategii.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. R10, 10.d.) Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych; wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń.	26