CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN GIMNAZJALNY
W ROKU SZKOLNYM 2012/2013

CZĘŚĆ MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZA
MATEMATYKA

ROZWIĄZANIA ZADAŃ I SCHEMATY PUNKTOWANIA

GM-M1-132

KWIECIEŃ 2013

Liczba punktów za zadania zamknięte i otwarte: 29

Zadania zamknięte

Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Zasady przyznawania punktów
1.	C	• poprawna odpowiedź – 1 p. • błędna odpowiedź lub brak odpowiedzi – 0 p.
2.	D	
3.	A	
4.	PF	
5.	A	
6.	D	
7.	PP	
8.	A	
9.	A	
10.	FF	
11.	PP	
12.	B	
13.	C	
14.	PP	
15.	A	
16.	D	
17.	C	
18.	B	
19.	PP	
20.	D	

Zadania otwarte

UWAGA

- **Za każde inne niż przedstawione poprawne rozwiązanie przyznajemy maksymalną liczbę punktów.**
- **Jeśli na jakimkolwiek etapie rozwiązania zadania popełniono jeden lub więcej błędów rachunkowych, ale zastosowane metody były poprawne, to obniżamy ocenę rozwiązania o 1 punkt.**

Zadanie 21. (0–3)

Przykładowe sposoby rozwiązania

I sposób

x – liczba dziewcząt
$0{,}8x$ – liczba chłopców
Sytuację przedstawioną w zadaniu opisuje równanie
$x = 0{,}8x + 3$
$0{,}2x = 3$
$x = 15$
Odpowiedź. W klasie jest 15 dziewcząt.

II sposób

x – liczba dziewcząt
y – liczba chłopców
Warunki zadania opisuje układ równań

$$\begin{cases} y = 0{,}8x \\ x = y + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0{,}8x \\ x = 0{,}8x + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0{,}8x \\ 0{,}2x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0{,}8x \\ x = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 12 \\ x = 15 \end{cases}$$

Odpowiedź. W klasie jest 15 dziewcząt.

III sposób

Z treści zadania wynika, że liczba dziewcząt jest o 3 większa od liczby chłopców i jednocześnie liczba chłopców jest o 20% mniejsza niż liczba dziewcząt, czyli 20% liczby dziewcząt (x) jest równe 3.

20% — 3 lub $0{,}2x = 3$
40% — 6 $x = 15$
⋮
100% — 15

Liczba dziewcząt jest równa 15.

IV sposób (prób i błędów)

Liczba chłopców stanowi 80% liczby dziewcząt, zatem stosunek liczby chłopców do liczby dziewcząt jest równy $\frac{8}{10} = \frac{12}{15} = \frac{16}{20} = \frac{20}{25} = \frac{24}{30} = \frac{28}{35} = \ldots$

Spośród wszystkich liczb naturalnych, których stosunek jest równy $\frac{8}{10}$, tylko dla liczb 12 i 15 różnica jest równa 3.

Odpowiedź. W klasie jest 15 dziewcząt.

lub

x – liczba dziewcząt
y – liczba chłopców

$y = 0{,}8x$
$x > y$

$x = 20$, to $y = 0{,}8 \cdot 20 = 16$; $16 + 3 = 19 \neq 20$
$x = 19$, to $y = 0{,}8 \cdot 19 = 15{,}2$ – nie spełnia warunków zadania
$x = 18$, to $y = 0{,}8 \cdot 18 = 14{,}4$ – nie spełnia warunków zadania
$x = 17$, to $y = 0{,}8 \cdot 17 = 13{,}6$ – nie spełnia warunków zadania
$x = 16$, to $y = 0{,}8 \cdot 16 = 12{,}8$ – nie spełnia warunków zadania
$x = 15$, to $y = 0{,}8 \cdot 15 = 12$; $12 + 3 = 15$ – zgadza się

Aby y było liczbą naturalną, x musi być liczbą podzielną przez 5.

$x = 10$, to $y = 0{,}8 \cdot 10 = 8$, ale $8 + 3 = 11 > 10$
$x = 5$, to $y = 0{,}8 \cdot 5 = 4$, ale $4 + 3 = 7 > 5$
$x = 20$, to $y = 0{,}8 \cdot 20 = 16$, ale $16 + 3 = 19 < 20$
$x = 25$, to $y = 0{,}8 \cdot 25 = 20$, ale $20 + 3 = 23 < 25$
$x = 30$, to $y = 0{,}8 \cdot 30 = 24$, ale $24 + 3 = 27 < 30$

Dla $x < 15$ różnica między x i y jest za mała (mniejsza niż 3), a dla $x > 15$ różnica ta jest za duża (większa od 3). Zatem liczba dziewcząt $x = 15$ jest jedynym możliwym rozwiązaniem.

Poziom wykonania

P_6 – 3 punkty – pełne rozwiązanie

obliczenie liczby dziewcząt w klasie (15 dziewcząt), otrzymane w wyniku rozwiązania równania lub układu równań lub rozumowania
lub
podanie odpowiedzi – 15 dziewcząt, uzyskanej metodą prób i błędów (sprawdzenie obu warunków zadania)

P_5 – 2 punkty – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.)

poprawne ułożenie równania lub układu równań (I i II sposób)

lub

zauważenie, że liczba 3 jest równa 20% liczby dziewcząt (III sposób)

P_2 – 1 punkt – dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane

wyrażenie liczby chłopców w zależności od liczby dziewcząt (I sposób)

lub

ułożenie układu równań, w którym tylko jedno równanie jest poprawne (II sposób)

lub

sprawdzenie warunków zadania dla kilku liczb (IV sposób), ale bez znalezienia poprawnej odpowiedzi

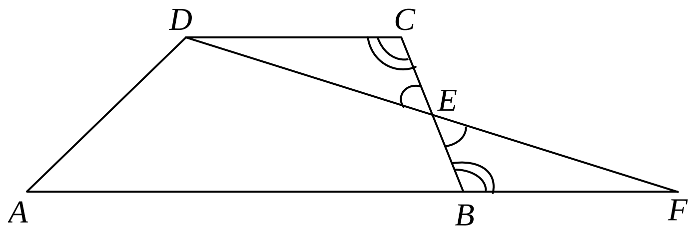
P_0 – 0 punktów – rozwiązanie niestanowiące postępu

rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania

Zadanie 22. (0–2)

<u>Przykładowe sposoby rozwiązania</u>

I sposób



Zauważmy, że:

$P_{ABCD} = P_{ABED} + P_{CED}$

$P_{AFD} = P_{ABED} + P_{BEF}$

Aby wykazać równość pól trapezu *ABCD* i trójkąta *AFD* wystarczy wykazać, że trójkąty *BEF* i *CED* są przystające.

$|CE| = |EB|$ – z warunków zadania

$|\sphericalangle CED| = |\sphericalangle FEB|$ – jako kąty wierzchołkowe

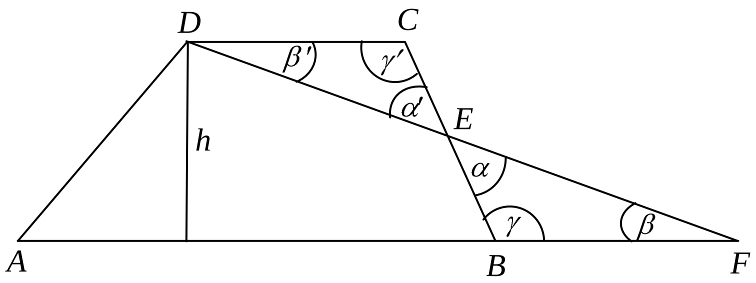
$|\sphericalangle EBF| = |\sphericalangle ECD|$ – jako kąty naprzemianległe, gdyż $(AF \| DC)$

Stąd trójkąty *BEF* i *CED* są przystające (na podstawie cechy przystawania trójkątów kbk) czyli mają równe pola.

II sposób

$$P_{ABCD} = \frac{(AB+CD)h}{2}$$

$$P_{AFD} = \frac{1}{2} AF \cdot h$$



Trapez *ABCD* i trójkąt *AFD* mają taką samą wysokość, więc aby wykazać równość ich pól wystarczy uzasadnić, że suma dlugości podstaw trapezu jest równa długości podstawy trójkąta.

Trójkąt *CED* i trókąt *BEF* mają kąty parami równe:

$\alpha = \alpha'$ – jako kąty wierzchołkowe,

$\beta = \beta'$ – jako kąty naprzemianległe,

$\gamma = \gamma'$ – jako kąty naprzemianległe.

Z treści zadania wiadomo także, że boki *CE* i *BE* tych trójkątów są równe i są to boki odpowiednie. Stąd wynika, że trójkąty *CED* i *BEF* są przystające, a więc boki *CD* i *BF* tych trójkątów też są równe.

Skoro $CD = BF$, to $AB + CD = AB + BF = AF$

Poziom wykonania

P_6 – 2 punkty – pełne rozwiązanie

wykazanie równości pól trapezu i trójkąta wraz z uzasadnieniem przystawania trójkątów *CED* i *BEF*

P_3 – 1 punkt – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane, ale w trakcie ich pokonywania popełniono błędy

uzasadnienie, że trójkąty *CED* i *BEF* są przystające

lub

wykazanie równości pól trapezu i trójkąta bez uzasadnienia przystawania trójkątów *CED* i *BEF*

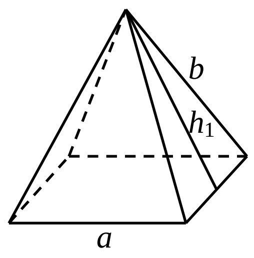
P_0 – 0 punktów – rozwiązanie niestanowiące postępu

rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania

Zadanie 23. (0–4)
Przykładowe sposoby rozwiązania

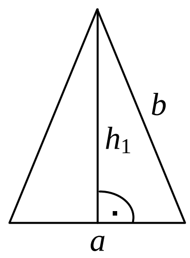
I sposób

$P_b = 80\ \text{cm}^2$
$P_c = 144\ \text{cm}^2$



a – długość krawędzi podstawy ostrosłupa
b – długość krawędzi bocznej ostrosłupa
h_1 – wysokość ściany bocznej ostrosłupa
P_p – pole podstawy ostrosłupa

$P_p = 144 - 80$
$P_p = 64\ (\text{cm}^2)$
Ponieważ $P_p = a^2$, to $a = 8$ cm

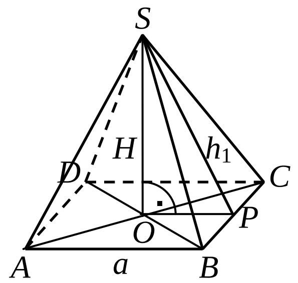


Powierzchnię boczną tworzą 4 trójkąty równoramienne.
P_1 – pole jednego trójkąta
$P_b = 4 \cdot P_1$
$P_1 = \frac{80}{4} = 20\ (\text{cm}^2)$
Pole trójkąta
$P_1 = \frac{1}{2}\ a \cdot h_1$, stąd $h_1 = \frac{2P_1}{a}$
$h_1 = \frac{2 \cdot 20}{8} = 5\ (\text{cm})$
Długość krawędzi bocznej ostrosłupa jest równa
$b^2 = (\frac{1}{2}\ a)^2 + h_1^2$
$b^2 = 4^2 + 5^2$
$b^2 = 16 + 25$
$b^2 = 41$
$b = \sqrt{41}\ (\text{cm})$

Odpowiedź. Długość krawędzi podstawy ostrosłupa jest równa 8 cm a długość krawędzi bocznej $\sqrt{41}$ cm.

II sposób

a – długość krawędzi podstawy ostrosłupa
H – wysokość ostrosłupa
h_1 – wysokość ściany bocznej ostrosłupa
P_p – pole podstawy ostrosłupa



$P_p = 144 - 80$
$P_p = 64\ (\text{cm}^2)$

Ponieważ $P_p = a^2$, to $a = 8$ cm

Powierzchnię boczną tworzą 4 trójkąty równoramienne.
$P_b = 4 \cdot P_1$, gdzie P_1 – pole jednego trójkąta

$P_1 = \frac{1}{2}\, a \cdot h_1$, czyli $P_b = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1$

$h_1 = \frac{P_b}{2a}$

$h_1 = \frac{80}{16} = 5$ (cm)

Z trójkąta SOP obliczamy wysokość H ostrosłupa (SP = 5 cm, OP = 4 cm)

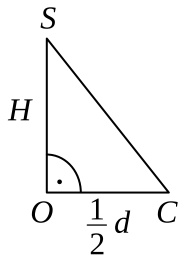
$H^2 + OP^2 = SP^2$
$H^2 = 5^2 - 4^2$
$H^2 = 25 - 16$
$H^2 = 9$
$H = 3$ (cm)

Z trójkąta SOC obliczamy długość krawędzi bocznej ostrosłupa.

$SC^2 = SO^2 + OC^2$, gdzie OC – połowa długości przekątnej d podstawy ostrosłupa
$d = a\sqrt{2}$

$OC = \frac{1}{2} a\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{2}$

$SC^2 = 3^2 + (4\sqrt{2})^2$
$SC^2 = 9 + 32$
$SC = \sqrt{41}$ (cm)



Odpowiedź. Długość krawędzi podstawy ostrosłupa jest równa 8 cm a długość krawędzi bocznej $\sqrt{41}$ cm.

Poziom wykonania

P_6 – 4 punkty – pełne rozwiązanie

obliczenie długości krawędzi podstawy (8 cm) i długości krawędzi bocznej ($\sqrt{41}$ cm) ostrosłupa

P_5 – 3 punkty – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.)

poprawny sposób obliczenia długości krawędzi bocznej (zastosowanie tw. Pitagorasa)

$P_{3,4}$ – 2 punkty – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne

obliczenie wysokości ściany bocznej ostrosłupa (5 cm)
lub

obliczenie długości krawędzi bocznej ostrosłupa wynikające z błędnego zastosowania pola powierzchni całkowitej lub pola powierzchni bocznej lub pola ściany bocznej do wyznaczenia wysokości ściany bocznej (np. $144 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot h$ lub $80 = \frac{8 \cdot h}{2}$)

P_1 – 1 punkt – dokonano niewielkiego, ale koniecznego postępu na drodze do całkowitego rozwiązania
obliczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa (8 cm)
lub
obliczenie pola jednej ściany bocznej ostrosłupa (20 cm^2)

P_0 – 0 punktów – rozwiązanie niestanowiące postępu
rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania