



Mieczysław Fałat

**MATEMATYKA****1. Statystyki egzaminu**

W naszym okręgu do obowiązkowego egzaminu maturalnego z matematyki, który przeprowadzono w dniu 5 maja 2011 roku, o godzinie 9.00, przystąpiło, po raz pierwszy, 30439 absolwentów szkół ponadgimnazjalnych. O godzinie 14.00, tego samego dnia, 5076 zdających (t.j. 16,7% zdających egzamin obowiązkowy) rozwiązywało zadania z matematyki wybranej jako przedmiot dodatkowy (poziom rozszerzony egzaminu).

Tabela 1. Liczby zdających na egzaminie maturalnym z matematyki (przystępujący po raz pierwszy, stan 30 czerwca)

Wyszczególnienie	Liczba zdających		
	obowiązkowo	dodatkowo	RAZEM
	poziom podstawowy	poziom rozszerzony	
<i>OKE Wrocław</i>			
LO	18741	4558	23299
LP	1073	25	1098
T	9526	491	10017
LU	914	1	915
TU	185	1	186
RAZEM	30439	5076	35515
<i>Województwo dolnośląskie</i>			
LO	14138	3607	17745
LP	795	23	818
T	6411	352	6763
LU	617	1	618
TU	113	1	114
RAZEM	22074	3984	26058
<i>Województwo opolskie</i>			
LO	4603	951	5554
LP	278	2	280
T	3115	139	3254
LU	297	-	297
TU	72	-	72
RAZEM	8365	1092	9457

Spośród 30439 zdających w naszym okręgu obowiązkowy egzamin maturalny, 23484 zdających uzyskało co najmniej 30% punktów z arkusza. Zdawalność egzaminu z matematyki w naszym okręgu jest zatem równa 77,2% (zob. Tabela 2.). Zdawalność egzaminu była o 1,3 punktu procentowego wyższa w województwie opolskim (78,1%) niż zdawalność w województwie dolnośląskim (76,8%). Zdawalność zależała od typu szkoły i w naszym okręgu była najwyższa (87,1%) w liceach ogólnokształcących. Przy tym, przykładowo, zdawalność liceach ogólnokształcących z województwa opolskiego była wyższa o 1,6 punktu procentowego w porównaniu ze zdawalnością w liceach ogólnokształcących z Dolnego Śląska (88,3% wobec 86,7%).

Tabela 2. Zdawalność egzaminu maturalnego z matematyki (przystępujący po raz pierwszy, stan 30 czerwca)

Wyszczególnienie	Zdali egzamin obowiązkowy (poziom podstawowy)	
	liczba	procent zdających
<i>OKE Wrocław</i>		
LO	16326	87,1%
LP	462	43,1%
T	6414	67,3%
LU	244	26,7%
TU	38	20,5%
RAZEM	23484	77,2%
<i>Województwo dolnośląskie</i>		
LO	12262	86,7%
LP	324	40,8%
T	4195	65,4%
LU	149	24,1%
TU	20	17,7%
RAZEM	16950	76,8%
<i>Województwo opolskie</i>		
LO	4064	88,3%
LP	138	49,6%
T	2219	71,2%
LU	95	32,0%
TU	18	25,0%
RAZEM	6534	78,1%

Dane z powyższej tabeli przedstawiamy również w formie graficznej (zob. Diagram 1.).

W naszym okręgu średni wynik na obowiązkowym egzaminie maturalnym z matematyki, w grupie zdających po raz pierwszy, wyniósł 48,8% (Tabela 3.). Najlepiej na egzaminie wypadli absolwenci liceów ogólnokształcących – średni wynik w tej grupie szkół to 56,9%, najslabiej absolwenci liceów i techników uzupełniających – średnie wyniki w tych szkołach to, odpowiednio, 23,4% i 23,6%.

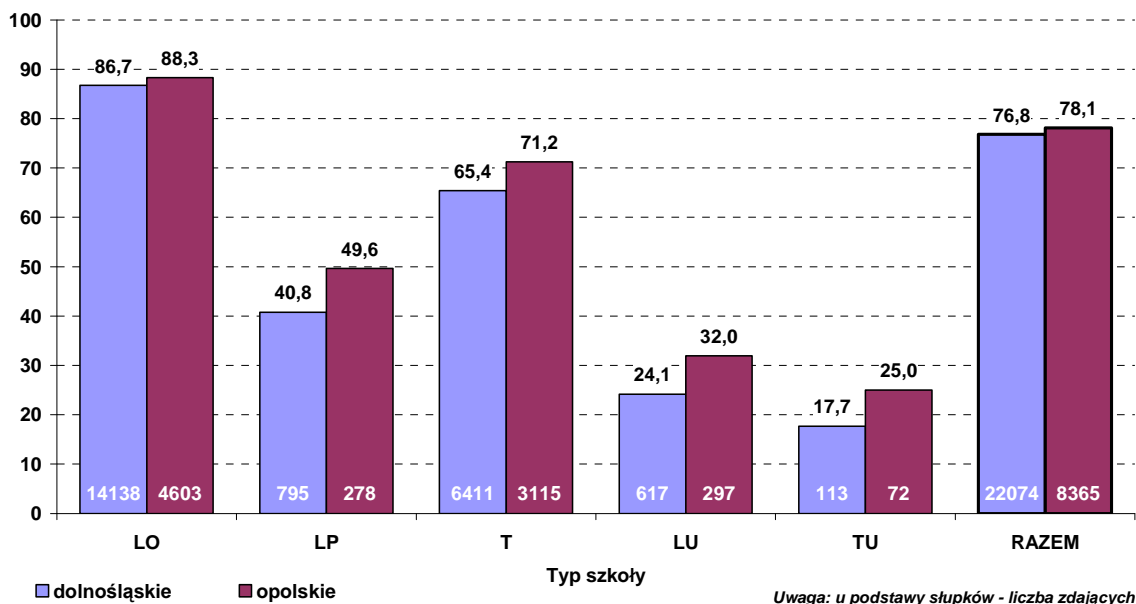


Diagram 1. Zdawalność egzaminu maturalnego z matematyki (przystępujący po raz pierwszy, stan 30 czerwca)

Tabela 3. Średnie wyniki procentowe zdających egzamin maturalny z matematyki (przystępujący po raz pierwszy, stan 30 czerwca)

Wyszczególnienie	Średni wynik procentowy	
	Egzamin obowiązkowy (poziom podstawowy)	Egzamin dodatkowy (poziom rozszerzony)
<i>OKE Wrocław</i>		
LO	56,8%	45,0%
LP	28,2%	13,5%
T	38,1%	18,4%
LU	23,4%	-
TU	23,6%	12,0%
RAZEM	48,8%	42,2%
<i>Województwo dolnośląskie</i>		
LO	56,9%	44,9%
LP	27,9%	14,0%
T	37,2%	17,8%
LU	22,2%	-
TU	23,4%	12,0%
RAZEM	49,0%	42,3%
<i>Województwo opolskie</i>		
LO	56,7%	45,3%
LP	28,9%	8,0%
T	39,9%	19,8%
LU	25,9%	-
TU	23,8%	-
RAZEM	48,1%	42,0%

Trudny dla maturzystów był egzamin z matematyki wybieranej jako przedmiot dodatkowy. Średni wynik procentowy w okręgu jest równy 42,2%. W tym roku maturzyści z wo-

jewództwa dolnośląskiego osiągnęli średni wynik nieznacznie wyższy (o 0,3 punktu procentowego) niż maturzyści z Opolszczyzny (odpowiednio 42,3% i 42,0%). Średnie wyniki procentowe w naszym okręgu zależały od typu szkoły i były najwyższe w grupie liceów ogólnokształcących (45,0%). Ponadto, maturzyści z liceów ogólnokształcących na Opolszczyźnie uzyskali nieco wyższy (o 0,4 punktu procentowego) wynik średni niż ich rówieśnicy z Dolnego Śląska (odpowiednio 45,3% i 44,9%). Dane z Tabeli 3. przedstawiamy także w postaci graficznej (zob. Diagramy 2. i 3).

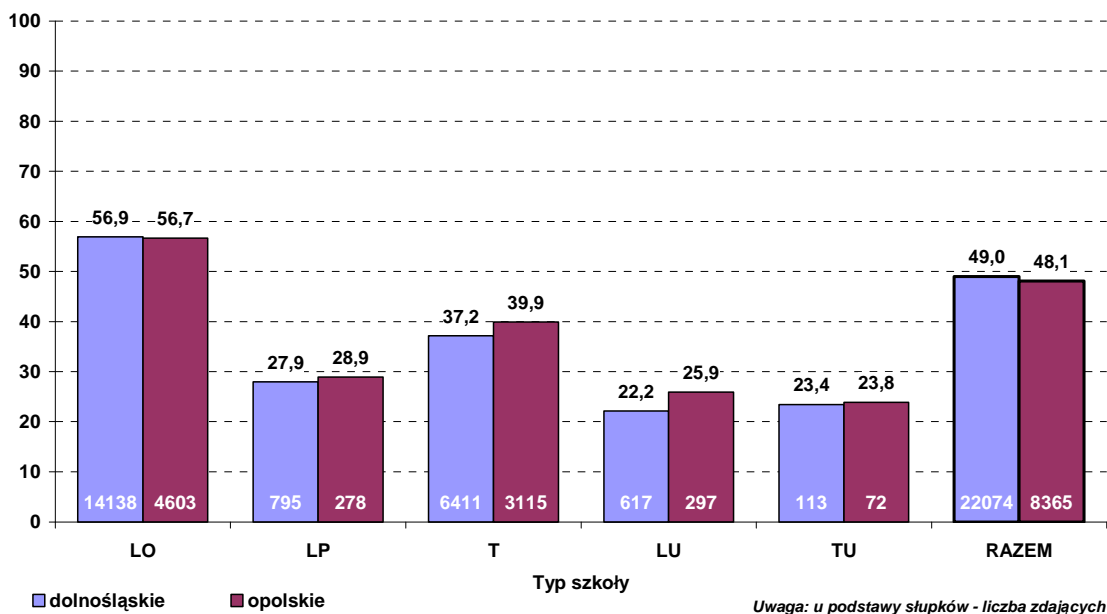


Diagram 2. Średnie wyniki procentowe egzaminu z matematyki na poziomie podstawowym (przystępujący po raz pierwszy, stan 30 czerwca)

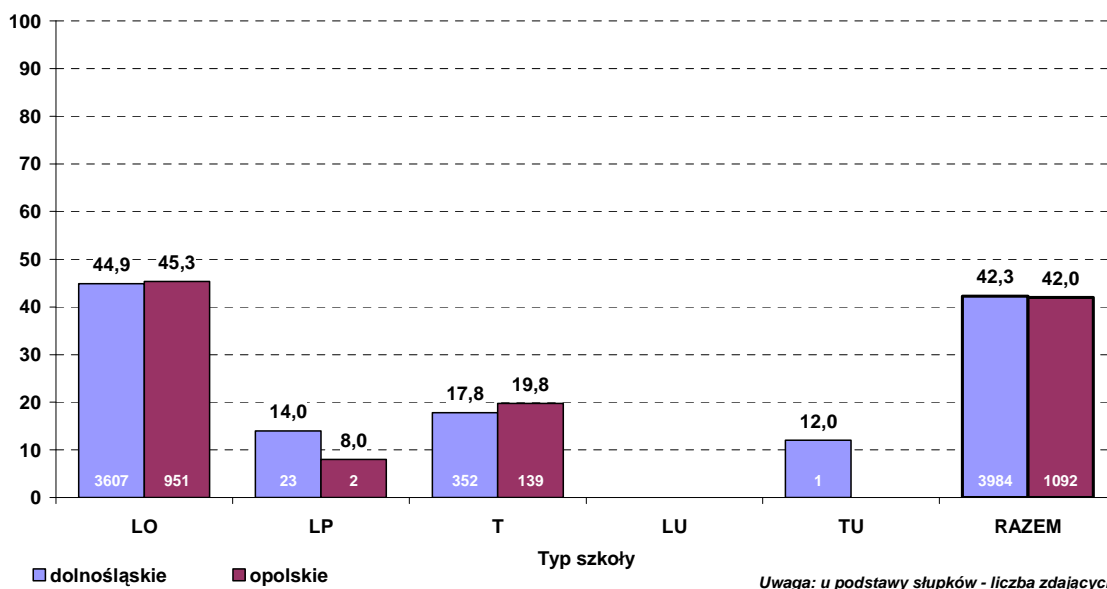


Diagram 3. Średnie wyniki procentowe egzaminu z matematyki na poziomie rozszerzonym (matematyka wybierana jako przedmiot dodatkowy, przystępujący po raz pierwszy, stan 30 czerwca)

## 2. Opis arkuszy egzaminacyjnych

### 2.1 Poziom podstawowy – opis arkusza standardowego

Zestaw standardowy zawierał 33 zadania, w tym: 23 zadania zamknięte (zdający wybierał poprawną odpowiedź spośród czterech podanych) oraz 10 zadań otwartych (zdający musiał samodzielnie zapisać rozwiązanie i odpowiedź).

Za każde poprawnie rozwiązane zadanie zamknięte zdający uzyskiwał jeden punkt, natomiast wśród zadań otwartych było siedem zadań krótkiej odpowiedzi (każde warte dwa punkty) oraz trzy zadania rozszerzonej odpowiedzi (dwa zadania czteropunktowe i jedno zadanie pięciopunktowe).

Zadania badały opanowanie umiejętności opisanych w pięciu obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych z matematyki. Lista umiejętności oraz odniesienie do standardów wymagań egzaminacyjnych i do podstawy programowej matematyki jest zawarta w kartotece arkusza (zob. tabela poniżej). W trzeciej kolumnie tej tabeli zastosowano skrótowe oznaczenia obszarów standardów:

- obszar I – wykorzystanie i tworzenie informacji – skrót INF,
- obszar II – wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji – skrót REP,
- obszar III – modelowanie matematyczne – skrót MOD,
- obszar IV – użycie i tworzenie strategii – skrót STR,
- obszar V – rozumowanie i argumentacja – skrót ROZ.

Kartoteka arkusza egzaminacyjnego, matematyka, poziom podstawowy

Numer zadania w arkuszu	Badana umiejętność Zdający:	Standard wymagań egzaminacyjnych	Numer treści ze standardu	Typ zadania	Punktacja
1	wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej	INF	1)f)	ZZ	1 pkt
2	wykonuje obliczenia procentowe	REP	1)d)	ZZ	1 pkt
3	rozkłada wielomian na czynniki, stosując wyłącznie wspólnego czynnika poza nawias	INF	2)b)	ZZ	1 pkt
4	sprawdza, kiedy układ równań liniowych ma nieskończenie wiele rozwiązań	MOD	4)e)	ZZ	1 pkt
5	rozwiązuje równanie kwadratowe i sprawdza, czy rozwiązanie należy do danego przedziału	REP	3)a)	ZZ	1 pkt
6	sprawdza, która z podanych liczb spełnia nierówność liniową i wybiera najmniejszą z nich	REP	1)e)	ZZ	1 pkt
7	interpretuje rozwiązanie nierówności kwadratowej i nierówności liniowej na osi liczbowej	REP	3)a) 1)e)	ZZ	1 pkt
8	wykorzystuje definicję logarytmu	REP	1)h)	ZZ	1 pkt
9	określa funkcję za pomocą wzoru i interpretuje wykresy funkcji kwadratowych	REP	4)h)	ZZ	1 pkt
10	oblicza miejsce zerowe funkcji liniowej	REP	4)	ZZ	1 pkt
11	stosuje wzór na $n$ -ty wyraz ciągu geometrycznego	REP	5)c)	ZZ	1 pkt
12	stosuje wzór na $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego	STR	5)c)	ZZ	1 pkt
13	wyznacza wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego samego kąta ostrego, mając daną wartość jednej z nich	REP	6)d)	ZZ	1 pkt

14	stosuje proste związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego	REP	6)c)	ZZ	1 pkt
15	znajduje związki miarowe w przestrzeni	STR	9)b)	ZZ	1 pkt
16	korzysta ze związków między kątem środkowym i kątem wpisanym	REP	7)a)	ZZ	1 pkt
17	znajduje związki miarowe w figurach płaskich	STR	7)c)	ZZ	1 pkt
18	bada równoległość prostych na podstawie ich równań kierunkowych	REP	4)g)	ZZ	1 pkt
19	posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ i sprawdza, czy dana prosta jest styczna do okręgu	REP	8)g)	ZZ	1 pkt
20	znajduje związki miarowe w sześcianie	REP	9)b)	ZZ	1 pkt
21	znajduje związki miarowe w bryłach obrotowych	REP	9)b)	ZZ	1 pkt
22	stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia	MOD	10)d)	ZZ	1 pkt
23	posługuje się średnią arytmetyczną	REP	10)a)	ZZ	1 pkt
24	rozwiązuje nierówność kwadratową	REP	3)a)	KO	2 pkt
25	uzasadnia zależność arytmetyczną stosując wzory skróconego mnożenia	ROZ	2)a)	KO	2 pkt
26	odczytuje z wykresu funkcji: zbiór wartości oraz maksymalny przedział, w którym funkcja jest malejąca	INF	4)b)	KO	2 pkt
27	stosuje wzory na $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego lub wykorzystuje własności trzech kolejnych wyrazów tego ciągu	MOD	5)c)	KO	2 pkt
28	stosuje proste związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego	STR	6)c)	KO	2 pkt
29	uzasadnia, że wskazany kąt jest prosty	ROZ	7)c)	KO	2 pkt
30	oblicza prawdopodobieństwo zdarzenia	STR	10)d)	KO	2 pkt
31	wyznacza współrzędne punktu styczności prostej i okręgu	STR	8)d)	RO	4 pkt
32	rozwiązuje zadanie umieszczone w kontekście praktycznym, prowadzące do równania kwadratowego z jedną niewiadomą	MOD	3)b)	RO	5 pkt
33	znajduje związki miarowe w sześcianie	STR	9)b)	RO	4 pkt

Poniżej zestawiono wszystkie zadania z arkusza dla poziomu podstawowego z podziałem na obszary standardów:

Obszar standardu	I (INF)	II (REP)	III (MOD)	IV (STR)	V (ROZ)
Numer zadania w arkuszu	1, 3, 26	2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 21, 23, 24	4, 22, 27, 32	12, 15, 17, 28, 30, 31, 33	25, 29
Procentowy udział obszaru standardu w całym arkuszu	8%	36%	18%	30%	8%

Poniższa tabela ilustruje udział poszczególnych treści podstawy programowej matematyki w arkuszu dla poziomu podstawowego:

Dział podstawy programowej matematyki	Numer zadania w arkuszu	Udział procentowy treści w całym arkuszu
1. liczby rzeczywiste	1, 2, 6, 7, 8	10%
2. wyrażenia algebraiczne	3, 25	6%
3. równania i nierówności	4, 5, 24, 32	18%
4. funkcje	9, 10, 18, 26	10%
5. ciągi liczbowe	11, 12, 27	8%
6. trygonometria	13, 14, 28	8%
7. planimetria	16, 17, 29	8%
8. geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej	19, 31	10%
9. stereometria	15, 20, 21, 33	14%
10. elementy statystyki opisowej; teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka	22, 23, 30	8%

Zauważmy, że 40% punktów za zadania z tego arkusza dotyczyło geometrii oraz trygonometrii (działy: 6., 7., 8. i 9. podstawy programowej)

## 2.2. Poziom rozszerzony – opis arkusza standardowego

Zestaw składał się z 12 zadań otwartych o zróżnicowanej punktacji. Wśród nich było 8 zadań czteropunktowych, 2 zadania sześciopunktowe i 2 zadania trzypunktowe.

Zadania sprawdzały umiejętności opisane w trzech najwyższych obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych (modelowania matematycznego, użycia i tworzenia strategii oraz rozumowania i argumentacji). Kartoteka arkusza zawiera listę umiejętności sprawdzonych 12 zadaniami z arkusza na poziomie rozszerzonym wraz z odniesieniem do standardów wymagań egzaminacyjnych i do podstawy programowej matematyki.

### Kartoteka arkusza egzaminacyjnego, matematyka, poziom rozszerzony

Numer zadania w arkuszu	Badana umiejętność Zdający:	Standard wymagań egzaminacyjnych	Numer treści ze standardu	Typ zadania	Punktacja
1	wykorzystuje cechy podzielności liczb całkowitych do dowodu twierdzenia	ROZ	1)a)R	RO	4 pkt
2	uzasadnia równość przekształcając równoważnie wyrażenie wymierne	ROZ	2)f)	RO	4 pkt
3	rozwiązuje równanie kwadratowe z parametrem stosując wzory Viète'a, przeprowadza dyskusję i wyciąga wnioski	STR	3)b)R	RO	6 pkt
4	rozwiązuje równanie trygonometryczne	STR	6)e)R	RO	4 pkt
5	stosuje: własności ciągu geometrycznego, wzory na $n$ -ty wyraz tego ciągu oraz na sumę $n$ wyrazów ciągu arytmetycznego	STR	5)c)	RO	4 pkt
6	znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem trygonometrii	STR	7)d)R	RO	4 pkt
7	rozwiązuje zadanie dotyczące wzajemnego położenia prostej i okręgu	STR	8)b)R	RO	4 pkt

8	znajduje związki miarowe w graniastosłupie w zadaniu optymalizacyjnym dotyczącym własności funkcji kwadratowej	MOD	4)l	RO	4 pkt
9	wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacji kombinatorycznej	STR	10)R	RO	4 pkt
10	przeprowadza dowód twierdzenia wykorzystując związki miarowe w figurach płaskich	ROZ	7)c)	RO	3 pkt
11	znajduje związki miarowe w ostrosłupie	STR	9)b)	RO	6 pkt
12	wykorzystuje własności prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństwa zdarzeń	ROZ	10)d)	RO	3 pkt

Zauważmy, że, podobnie jak w arkuszu dla poziomu podstawowego, maturzyści najczęściej punktów mogli uzyskać za zadania z geometrii i trygonometrii (42% punktów).

Na zakończenie tej części zestawiamy wszystkie zadania z arkusza dla poziomu rozszerzonego z podziałem na obszary standardów:

Obszar standardu	I (INF)	II (REP)	III (MOD)	IV (STR)	V (ROZ)
Numer zadania w arkuszu	-	-	8	3, 4, 5, 6, 7, 9, 11,	1, 2, 10, 12
Procentowy udział obszaru standardu w całym arkuszu	-	-	8%	64%	28%

## 2.3 Wskaźniki łatwości arkuszy i zadań egzaminacyjnych

### Poziom podstawowy egzaminu

Zaprezentowane w tej części tabele, wykresy i diagramy zostały odniesione do wyników wszystkich zdających w maju, których w naszym okręgu było 32 653 (30 439 zdających po raz pierwszy oraz 2214 zdających z lat ubiegłych lub skierowanych na egzamin ze szkół starszego typu). W poniższych analizach nie uwzględniono wyników 14 maturzystów – laureatów i finalistów olimpiady matematycznej, którym zgodnie z prawem przysługuje najwyższy wynik na maturze. Nie uwzględniono także wyników 77 zdających, których arkusze egzaminacyjne zostały unieważnione.

(Średnia) wartość wskaźnika łatwości arkusza egzaminacyjnego jest określona przez średni wynik procentowy uzyskany przez zdających. W naszym okręgu średni wynik procentowy uzyskany przez zdających na obowiązkowym egzaminie maturalnym z matematyki równa się 47%, a to oznacza, że arkusz był dla zdających trudny (por. klasyfikację prof. Niemierko). Wskaźnik łatwości arkusza był najwyższy w liceach ogólnokształcących 55,6%, w technikach i liceach profilowanych był już zdecydowanie niższy i wyniósł, odpowiednio, 36,8% oraz 26,6%. Arkusz okazał się najtrudniejszy dla zdających z techników uzupełniających i liceów uzupełniających – wskaźniki łatwości są równe, odpowiednio, 23% i 22,8%.



Rozkład wyników punktowych - matematyka 2011 - poziom podstawowy  
(N = 32 653)

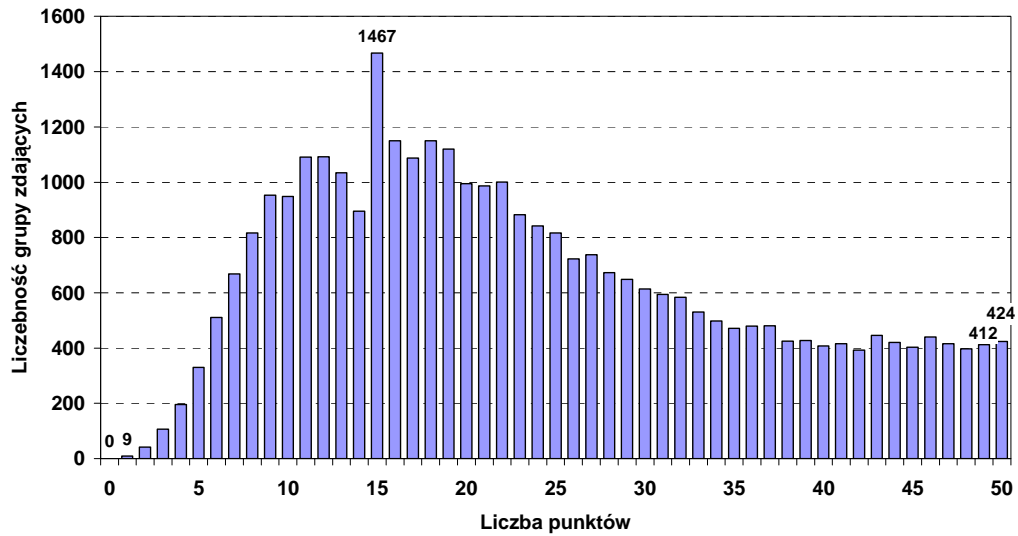


Diagram 4. Rozkład wyników punktowych

Diagram 4. ilustruje rozkład wyników punktowych uzyskanych przez zdających w maju 2011 roku. Nie jest specjalnym zaskoczeniem fakt, że rozkład jest prawoskośny z dominantą położoną dokładnie na progu zdania egzaminu. Cieszy fakt, że 424 zdających (1,3% wszystkich zdających) uzyskało wynik maksymalny, 50 punktów z arkusza. Martwi liczba 8693 zdających (26,6% ogółu zdających), którzy nie zdołali uzyskać 15 punktów, a zatem nie przekroczyli 30% progu zdania egzaminu.

Procentowy rozkład wyników pisemnego egzaminu maturalnego według typu szkoły, matematyka, maj 2011 - poziom podstawowy

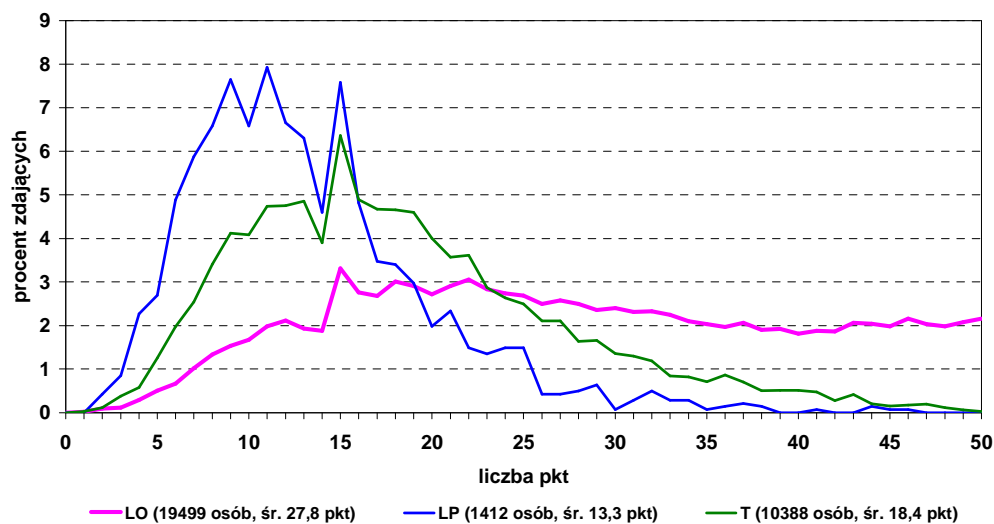


Diagram 5. Procentowy rozkład wyników egzaminu ze względu na typy szkół

Z umieszczonego powyżej diagramu 5. dość łatwo widać, że maturzyści z liceów ogólnokształcących (ich było najwięcej) częściej niż pozostali zdający uzyskiwali wyższe wyniki. W szczególności, na 424 wyników maksymalnych aż 421 należało do maturzystów z liceów

ogólnokształcących. Trzy pozostałe wyniki maksymalne uzyskali maturzyści z techników czteroletnich.

### Zadania zamknięte

W poniższej dwuczęściowej tabeli 6., zestawiono wskaźniki łatwości oraz opuszczenia w 23 zadaniach zamkniętych. Przypominamy, że zadania zamknięte zostały przygotowane w dwóch wersjach, różniących się kolejnością dystraktorów. Co ciekawe, zmiana kolejności dystraktorów nie spowodowała żadnej zmiany wskaźnika łatwości tylko w 3 zadaniach. Największa zmiana wskaźnika łatwości (równa 5 punktom procentowym) miała miejsce w zadaniu 8. Zadanie sprowadzało się do rozwiązania nierówności liniowej  $2x - 1 > 0$ , ponieważ wyrażenie  $2x - 1$  było liczbą logarytmowaną. Wspomnieć trzeba również o zadaniu 19., w którym zmiana wskaźnika łatwości jest równa 4 punktom procentowym. W tym zadaniu maturzyści mieli wskazać równanie prostej stycznej do okręgu o równaniu  $(x - 1)^2 + y^2 - 4 = 0$ .

Tabela 6. Wskaźnik łatwości oraz opuszczenia w zadaniach zamkniętych (wersja A – 16209 osób, wersja B – 16411 osób)

Numer zadania w arkuszu		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Opuszczenia	Wersja A	37	1	4	47	60	22	10	51	13	37	38	29
	Wersja B	43	5	2	50	63	33	20	59	11	32	38	46
Wskaźnik łatwości zadania	Wersja A	0,61	0,90	0,91	0,46	0,55	0,57	0,57	0,57	0,68	0,63	0,58	0,79
	Wersja B	0,60	0,89	0,90	0,52	0,57	0,54	0,56	0,52	0,69	0,65	0,59	0,81

Numer zadania w arkuszu		13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.
Opuszczenia	Wersja A	30	58	20	17	21	24	128	55	19	24	18
	Wersja B	25	48	22	17	23	24	108	54	26	25	22
Wskaźnik łatwości zadania	Wersja A	0,79	0,64	0,86	0,40	0,68	0,61	0,42	0,70	0,90	0,52	0,66
	Wersja B	0,79	0,64	0,84	0,39	0,69	0,62	0,38	0,71	0,90	0,55	0,67

W pozostałych 18 zadaniach zamkniętych różnice między wskaźnikami łatwości były równe jednemu lub dwóm punktom procentowym. Dodajmy, że zadanie 19. oraz zadanie 16. były dwoma najtrudniejszymi zadaniami zamkniętymi dla maturzystów w naszym okręgu (wskaźniki łatwości są równe tylko 0,40). Okazało się (zadanie 16.), że maturzyści mają kłopot z obliczaniem miar kątów w okręgu. Na przykład, w wersji A testu, odpowiedź niepoprawną ( $80^\circ$ ) wybrało aż 8172 osoby, podczas gdy poprawną ( $100^\circ$ ), tylko 6622 osoby.

Na dwóch kolejnych diagramach (Diagram 6. i Diagram 7.) przedstawiamy procentowe wybory dystraktorów dla obu wersji arkusza. Widzimy na przykład, że wybory niepoprawnego dystraktora w zadaniu 16. nie zależą od wersji testu – w wersji A tego wyboru dokonało 49,8% zdających, zaś w wersji B – 50,7% maturzystów.

Procentowy wybór dystraktorów w zadaniach zamkniętych, wersja A arkusza, matematyka, poziom podstawowy, maj 2011

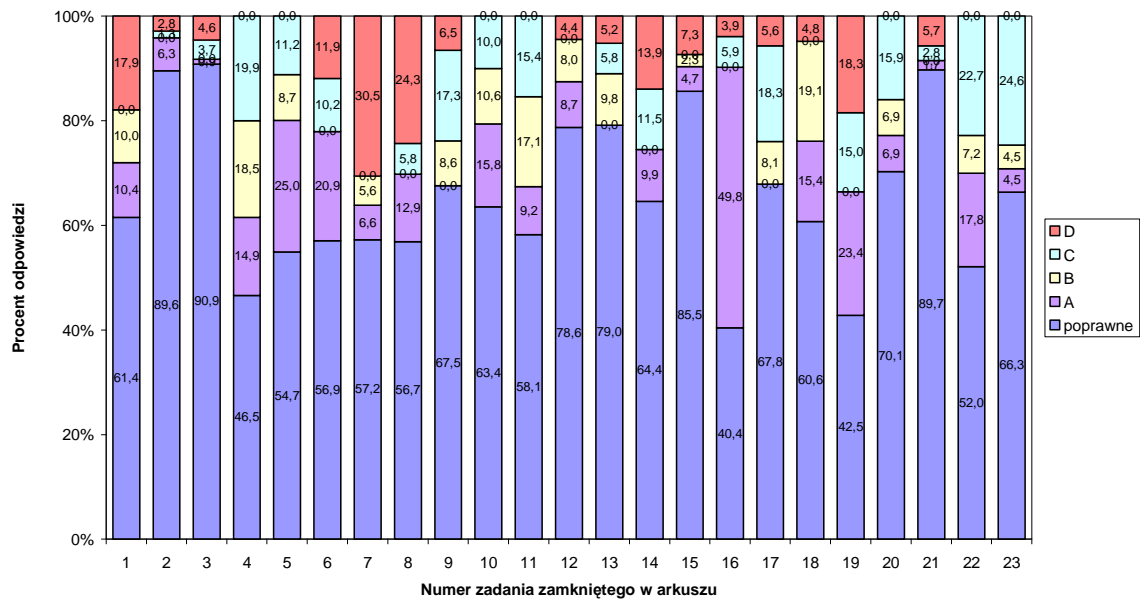


Diagram 6. Wybór dystraktorów – wersja A arkusza

Procentowy wybór dystraktorów w zadaniach zamkniętych, wersja B arkusza, matematyka, poziom podstawowy, maj 2011

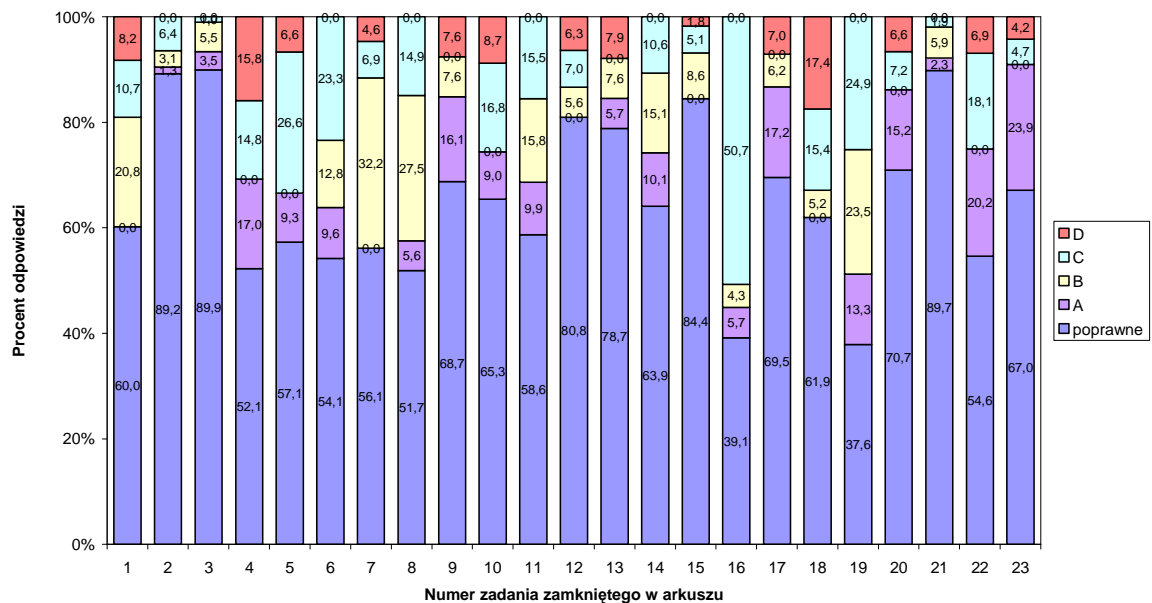


Diagram 7. Wybór dystraktorów – wersja B arkusza

Diagram 8. (zob. poniżej) zawiera wskaźniki łatwości 23 zadań zamkniętych z arkusza. Wynika z niego (wg klasyfikacji prof. Niemierko), że w arkuszu:

- były 2 zadania bardzo łatwe (zadanie 3. i zadanie 21.),
- było 5 zadań łatwych (zadania: 2., 12., 13., 15. i 20.),
- było 13 zadań umiarkowanie trudnych (zadania: 1., 5., 6., 7., 8., 9., 10., 11., 14., 17., 18., 22. i 23.),
- były 3 zadania trudne (zadania: 4., 16. i 19.).

Wskaźniki łatwości zadań zamkniętych  
matematyka, maj 2011, poziom podstawowy (N=32653)

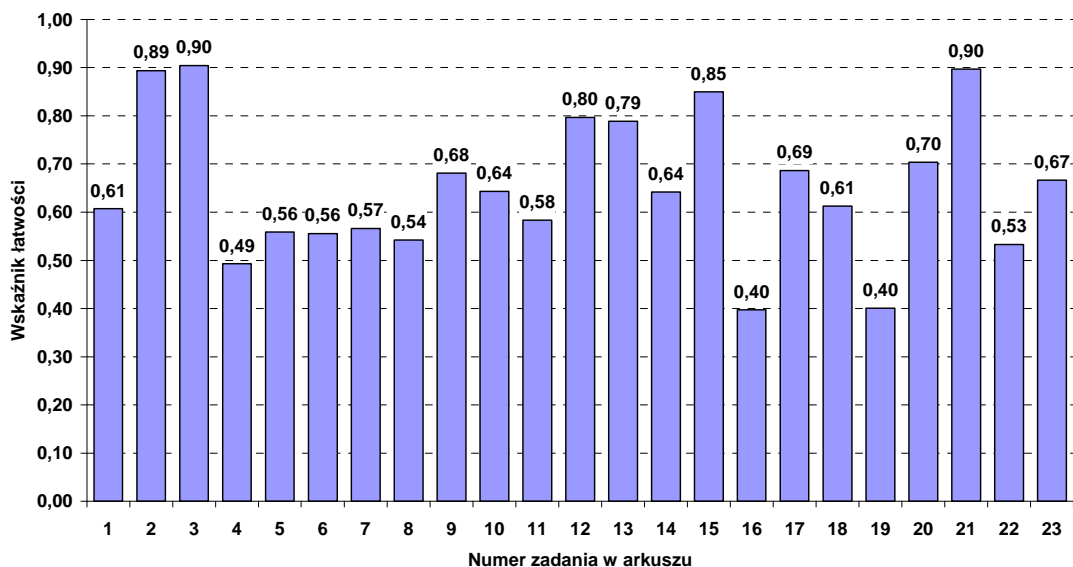


Diagram 8. Wskaźniki łatwości zadań zamkniętych

Trudne dla naszych maturzystów kolejny już raz okazało się (zadanie 16.) poprawne obliczenie i wskazanie miary kąta wpisanego w okręgu. Podobnie jest w przypadku pojęcia stycznej do okręgu w zadaniu 19. Tutaj dodatkową trudnością mogło być to, że poprawną odpowiedzią było równanie prostej prostopadłej do osi  $Ox$ . Trochę zaskakująca jest niska wartość wskaźnika łatwości w zadaniu 4. Zdający prawdopodobnie nie skojarzyli liczby rozwiązań tego układu z jego interpretacją graficzną. Zauważmy też, że spośród siedmiu początkowych zadań z arkusza tylko dwa zadania (nr 2 i nr 3) były łatwe dla maturzystów. W szczególności, 44% zdających straciło punkty w zadaniach 5. i 6. dotyczących, kolejno, równania i nierówności liniowej, zaś 39% maturzystów miało kłopot z oszacowaniem położenia liczb na osi liczbowej (zadanie 1.).

Procentowy rozkład wyników z zadań zamkniętych  
matematyka, maj 2011 - poziom podstawowy

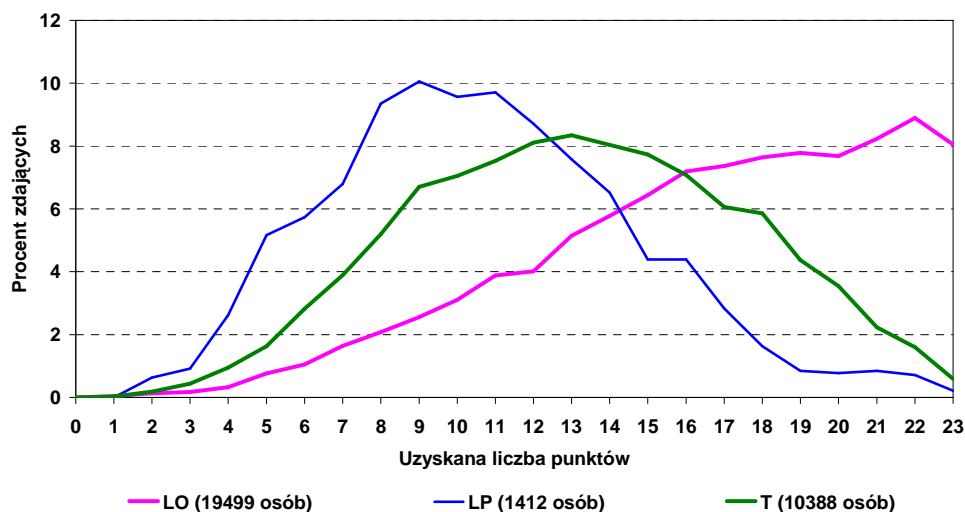


Diagram 9. Zadania zamknięte w trzech typach szkół – procentowy rozkład wyników

Jak widać (Diagram 9.), wyniki uzyskane w zadaniach zamkniętych mocno zależą od typu szkoły. Najwięcej kłopotów sprawiły zdającym z liceów profilowanych. Około 10% z nich uzyskało wynik w granicach od 8 do 11 punktów. Nieco lepsze wyniki uzyskali zdający z techników czteroletnich, zaś najlepiej prezentują się wyniki zdających z liceów ogólnokształcących – 8% z nich uzyskało maksymalną liczbę 23 punktów.

### Zadania otwarte

Zacznijmy od rozkładu punktów za zadania otwarte (zob. Diagram 10.).

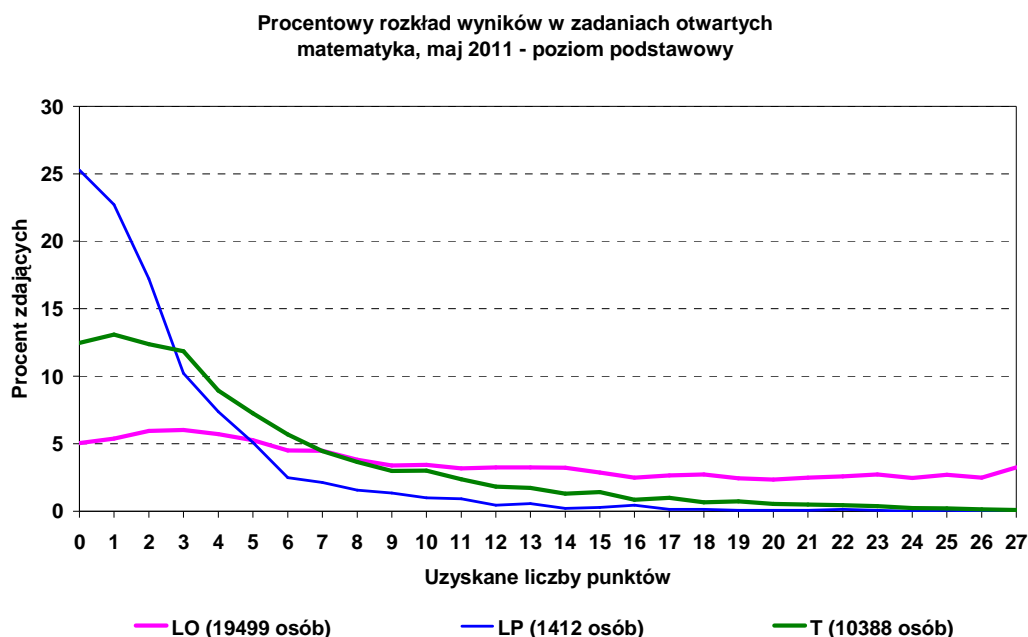


Diagram 10. Zadania otwarte w trzech typach szkół – procentowy rozkład wyników

Uwagę naszą z pewnością przykuwa procent zdających, którzy nie zdobyli ani jednego punktu z 27 możliwych do uzyskania. Taki wynik uzyskał co czwarty zdający z liceum profilowanego, co ósmy zdający z technikum czteroletniego i co dwudziesty zdający z liceum ogólnokształcącego. Na drugim biegunie są maksymalne wyniki, które są dziełem 634 zdających z LO i 8 zdających z techników.

Diagram 11. (zob. poniżej) ilustruje wskaźniki łatwości 10 zadań otwartych z tego arkusza. Trzy zadania z tego arkusza były dla maturzystów z naszego okręgu bardzo trudne (zadanie 25., zadanie 29 i zadanie 31.). O ile dość łatwo można było przewidzieć, że przeprowadzenie dowodu, czy to algebraicznego (zadanie 25.), czy geometrycznego (zadanie 29.) sprawi zdającym najwięcej kłopotów, o tyle niska skuteczność w zadaniu 31. może być zaskoczeniem. Umiejętność obliczenia współrzędnych punktu styczności okręgu o danym środku i danym równaniu prostej stycznej była zbyt złożona dla zdających w maju 2011 roku. Po trudnym dla maturzystów zadaniu zamkniętym nr 19, rezultaty uzyskane w zadaniu 31. są potwierdzeniem nieopanowania tej umiejętności.

Wskaźniki łatwości zadań otwartych  
matematyka, maj 2011, poziom podstawowy (N=32653)

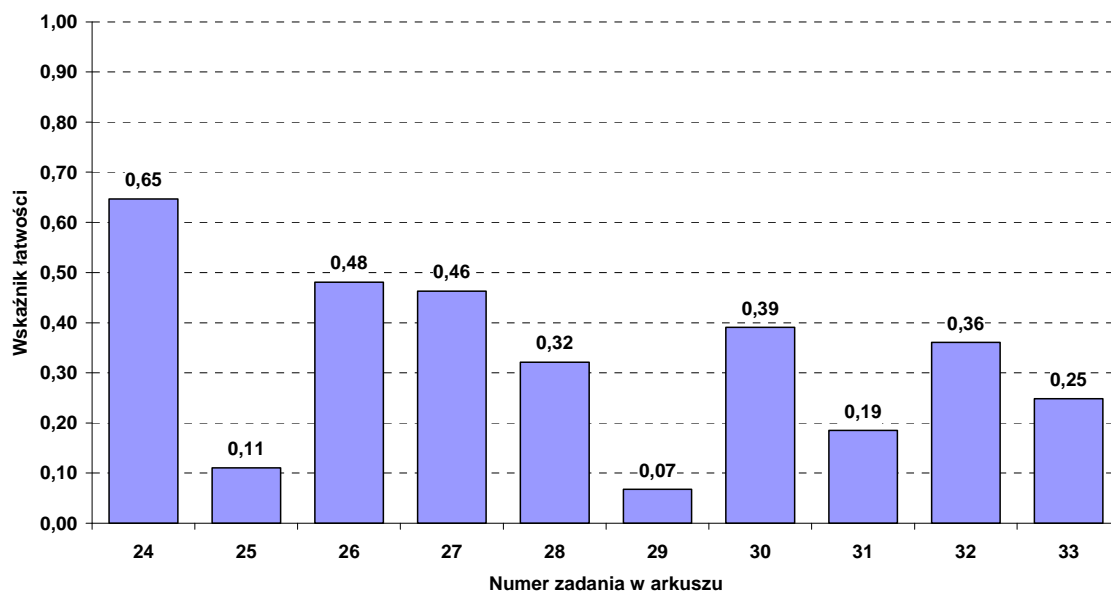


Diagram 11. Wskaźniki łatwości zadań otwartych

Oprócz trzech zadań bardzo trudnych, w arkuszu majowym sześć zadań było dla maturzystów z naszego okręgu trudnych i tylko jedno (zadanie 24. – rozwiązanie nierówności kwadratowej) było umiarkowanie trudne. Łatwość zadania 24. nie napawa jednak optymizmem. Maturzyści stracili w tym zadaniu 35% punktów, zaś rozwiązania, w których zdający poprzestaje na obliczeniu pierwiastków trójmianu kwadratowego nie były wcale rzadkością. Wskaźniki łatwości zadań otwartych zestawiamy dla jasności obrazu z frakcją opuszczeń tych zadań (zob. Tabela 7.)

Tabela 7. Frakcje opuszczeń zadań otwartych w arkuszu dla poziomu podstawowego

Numer zadania w arkuszu	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.	31.	32.	33.
Frakcja opuszczeń	2,4%	24,9%	3,5%	9,5%	20,9%	11,5%	11,9%	14%	11,2%	31%

Teraz nieco łatwiej wytłumaczyć, dlaczego zadanie 33., badające umiejętność znalezienia związków miarowych w sześciacie, okazało się zadaniem trudnym (wskaźnik łatwości równa się 0,25). To zadanie było najczęściej opuszczanym zadaniem w arkuszu – częściej niż oba zadania na dowodzenie (nr 25 i nr 29). Tak niskiej skuteczności maturzystów w tym zadaniu nie tłumaczy fakt, że było ono ostatnim zadaniem w zestawie – czasu na jego rozwiązanie z pewnością wystarczyło wszystkim zdającym. Schemat oceniania też był dość przyjazny – zdający nie tracili nawet jednego punktu za brak uzasadnienia, że trójkąt *KLM* jest równoboczny. To popełnione błędy w dużym stopniu przyczyniły się do takiego wyniku. Błędna interpretacja długości odpowiednich odcinków w sześciacie, zła postać twierdzenia Pitagorasa przy obliczaniu długości potrzebnych odcinków, to dwa grzechy główne maturzystów w tym zadaniu.

Zwróćmy też uwagę na niską (tylko 0,32) skuteczność maturzystów w zadaniu 28., uzyskaną przy 20,9% opuszczeń. W zadaniu tym wystarczyło poprawnie dodać ułamki z lewej strony równości, skorzystać z podstawowego związku między sinusem i cosinusem tego samego kąta i obliczyć wartość mianownika ułamka, mając jego licznik i wartość tego ułamka. Pewną trudnością dla zdających mogło być obliczanie od razu iloczynu sinusa i cosinusa kąta zamiast poszczególnych jego czynników. Z oglądu rozwiązań wynika jednak, że to umiejętność poprawnego wykonania dodawania ułamków zwykłych zadecydowała o niskim wyniku zdających. Mniejmy też świadomość, że niemała część zdających została studentami szkół wyższych nie mając dostatecznie opanowanej umiejętności skracania ułamków zwykłych, ten grzech popełniali także zdający egzamin na poziomie rozszerzonym!

I jeszcze rzut oka na dwa zadania trudne z tego arkusza: nr 32 i nr 30. Zadanie 32., wymagające umiejętności dobrania modelu (układu równań) do sytuacji opisanej w zadaniu (kontekstem jest układ: prędkość-droga-czas) nie może być żadnym zaskoczeniem dla maturzystów. W listopadzie mieli do rozwiązania nawet bardziej skomplikowany problem. Wskaźnik łatwości równy 0,36 nie przynosi zdającym chwały. Jak widać z Diagramu 12. (zob. poniżej), aż 47,4% zdających uzyskało 0 punktów, tzn. nie potrafiło ułożyć poprawnie nawet jednego równania. Odejmując 11,2% opuszczających to zadanie sytuacja nie nastraja optymizmem. Tylko co czwarty maturzysta potrafił poprawnie rozwiązać to zadanie.

W zadaniu 30. sytuacja nie jest lepsza. Skuteczność zdających, mierzona wskaźnikiem łatwości jest tylko o 3 punkty procentowe lepsza (0,39), zaś 49,3% zdających nie zdobyło ani jednego punktu. Czyżby odejście od, klasycznego już, dwukrotnego rzutu kostką do gry (symetryczną, sześcienną) do losowania ze zwracaniem dwóch liczb ze zbioru siedmioelementowego stanowiło istotne utrudnienie? Tylko 27,5% zdających zdobyło oba punkty za to zadanie.

**Procentowy rozkład wyników uzyskanych w zadaniach otwartych, matematyka, poziom podstawowy, maj 2011 (N=32 653)**

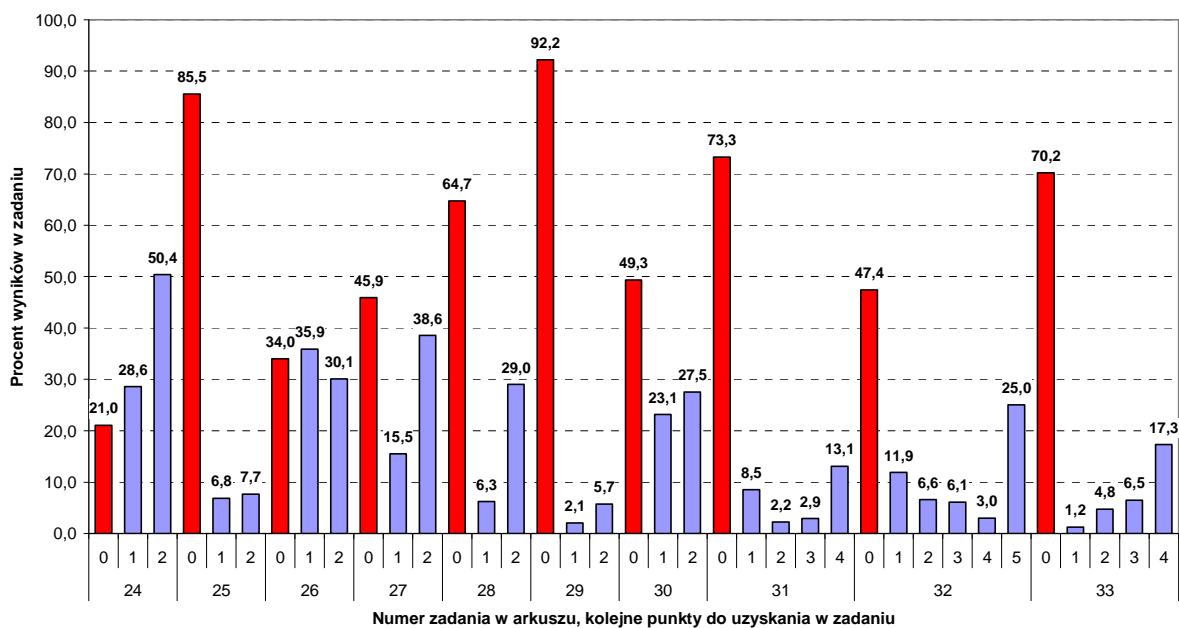


Diagram 12. Zadania otwarte – procentowy rozkład poszczególnych punktów

Obserwacja Diagramu 12., w szczególności frakcji zdających, którzy w kolejnych zadaniach nie zdobyli ani jednego punktu (słupki czerwone) może być nawet frustrująca. I nie idzie tutaj o zadania na dowodzenie (nr 25 i nr 29). Począwszy od 21% zer w zadaniu algorytmicznym – rozwiązanie nierówności kwadratowej, poprzez 34% zer w zadaniu wymagającym odczytania własności funkcji z jej wykresu (zadanie 26.), czy też 45,9% zer w zadaniu 27. – umiejętność zapisania i rozwiązania układu równań liniowych w bardzo oswojonym kontekście (ciąg arytmetyczny), a skończywszy na 73,3% zer w zadaniu 31. (współrzędne punktu styczności prostej i okręgu). Ciekawe, czy podczas następnej sesji egzaminacyjnej te wielkości się zmniejszą. Wymagania egzaminacyjne nie zmieniły się przecież i do roku 2014 nie zmieniają się.

Zachęcamy Państwa do przeanalizowania poniższych dwóch diagramów (Diagramy 13. i 14.). Ilustrują one, kolejno, zależność uzyskanej średniej liczby punktów za zadania otwarte od liczby uzyskanych punktów za zadania zamknięte (Diagram 13.) oraz zależność odwrotną (Diagram 14.).

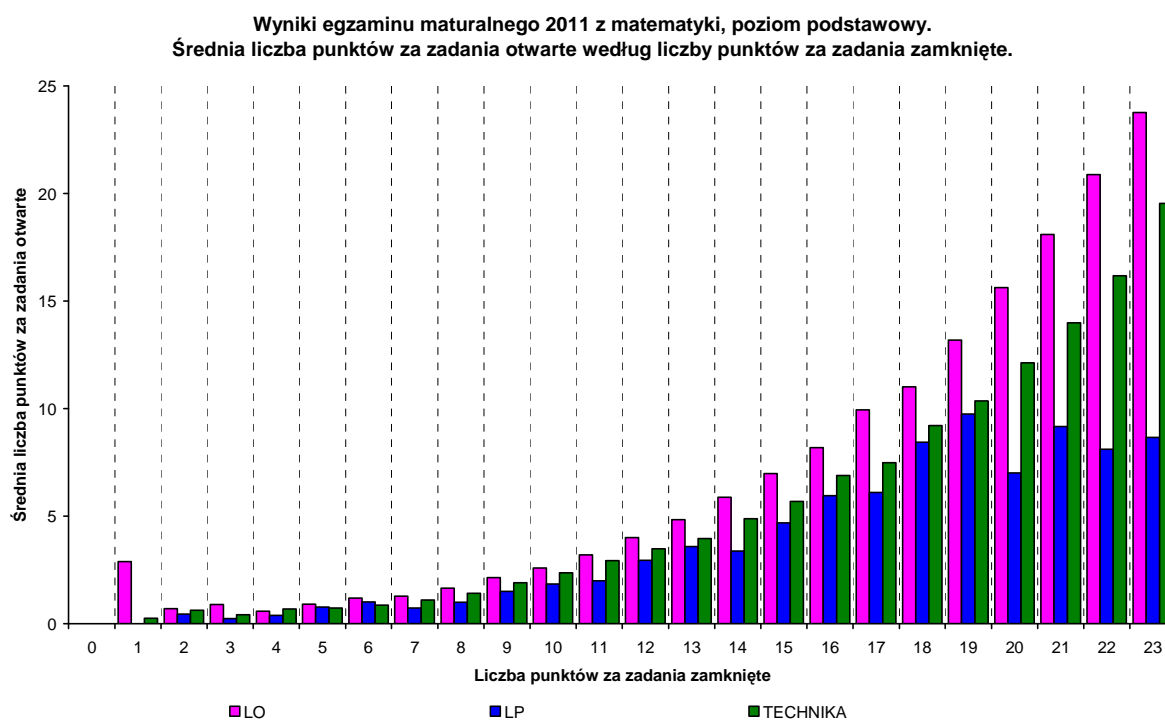


Diagram 13. Średnia liczba punktów w zadaniach otwartych w zależności od liczby punktów uzyskanych za zadania zamknięte

Linie trendu dla wyników zdających z liceów ogólnokształcących i techników kształtem przypominają krzywe wykładnicze. Różnice między wynikami zdających z trzech typów szkół pogłębiają się mocno w miarę przesuwania się w kierunku wyników maksymalnych. Na przykład, jeżeli popatrzymy na wynik równy 20 punktom za zadania zamknięte, to zdający z liceów ogólnokształcących uzyskali za zadania otwarte średnio około 15 punktów, zdający z techników około 12 punktów, zaś zdający z liceów profilowanych około 7 punktów. Zakres osi pionowej nie przekracza 25 punktów, ponieważ taki był średni wynik punktowy zdających, którzy uzyskali maksymalny wynik 23 punktów za zadania zamknięte.

Zależność odwrotna – średnia liczba punktów za zadania zamknięte według liczby punktów za zadania otwarte – nie jest już tak silna, choć linie trendów dalej są wykresami



funkcji rosnących (zob. Diagram 14.). Jeżeli przyjrzymy się średnim wynikom punktowym za zadania zamknięte, zawartym między 15 a 20 punktów, to okaże się, że należą one do zdających ze wszystkich trzech typów szkół, którzy uzyskali od 7 nawet do 23 punktów za zadania otwarte.

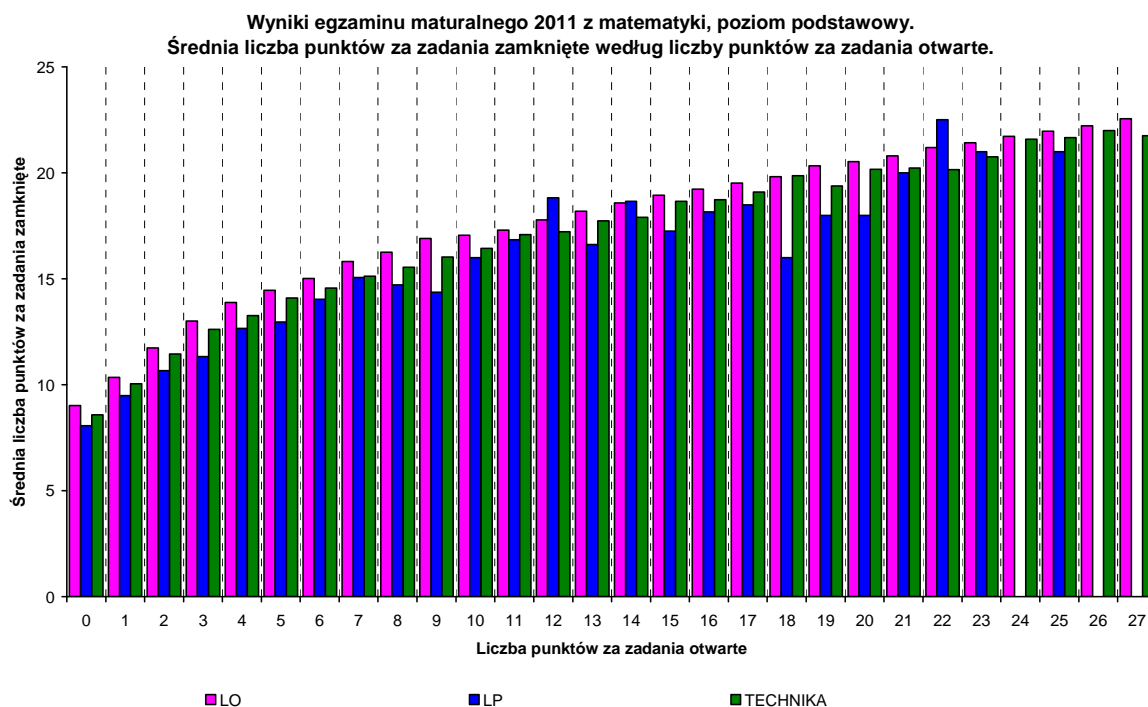


Diagram 14. Średnia liczba punktów w zadaniach zamkniętych w zależności od liczby punktów za zadania otwarte

W prawym końcu osi poziomej widać na przykład, że zdający z liceów profilowanych nie uzyskali ani 27 punktów ani 26 punktów za zadania zamknięte. Jest jednak niewielka grupa zdających z tego typu szkoły, którzy uzyskali 25 punktów za zadania zamknięte, a jednocześnie ich średni wynik punktowy za zadania otwarte jest równy 21 punktów i ten wynik jest tylko o 1 punkt niższy od średniego wyniku zdających z liceów ogólnokształcących i techników.

### Poziom rozszerzony egzaminu

Na egzaminie maturalnym z matematyki wybranej jako przedmiot dodatkowy (poziom rozszerzony egzaminu) zdający uzyskali średni wynik procentowy równy 41%. Tym samym arkusz zawierający 12 zadań otwartych był dla tegorocznych maturzystów trudny (por. klasyfikację B. Niemierki). Wpływ na taki wynik ma oczywiście stopień trudności każdego zadania jak również fakt, że zadania w arkuszu badały umiejętności opisane w obszarach trzech najwyższych standardów (MOD, STR, ROZ, w szczególności w arkuszu były 4 zadania na dowodzenie), zaś bazą treściową dla nich były niemal wszystkie działy podstawy programowej.

Maksymalną liczbę 50 punktów za pełne rozwiązania wszystkich 12 zadań z arkusza uzyskało 29 zdających, natomiast 22 zdających „zgubiło” zaledwie jeden punkt (zob. Diagram 14.). Na przeciwnym biegunie znajduje się 116 zdających, którzy nie zdobyli ani jednego punktu za swoje rozwiązania.

**Rozkład wyników punktowych,  
matematyka, maj 2011, poziom rozszerzony (N = 5465)**

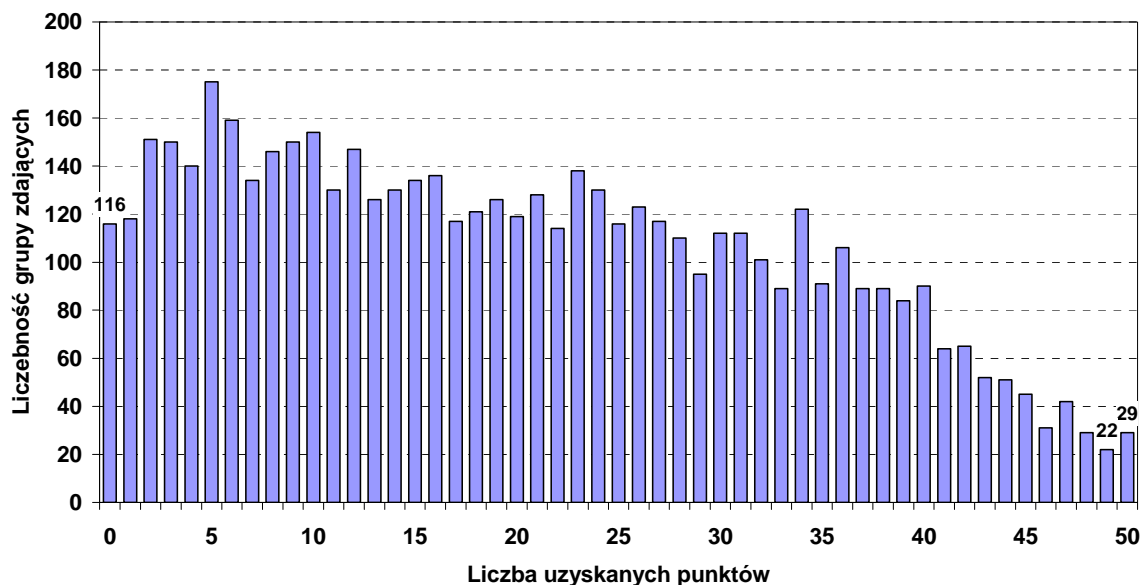


Diagram 14. Poziom rozszerzony egzaminu maturalnego z matematyki – rozkład wyników punktowych

1593 zdających uzyskało wyniki w przedziale od 0 do 10 punktów, 1286 zdających uzyskało wyniki od 11 do 20 punktów, 1183 wyniki od 21 do 30 punktów, 973 zdających wyniki od 31 do 40 punktów i 430 zdających wyniki od 41 do 50 punktów.

**Procentowy rozkład wyników pisemnego egzaminu maturalnego  
w dwóch typach szkół, matematyka, maj 2011, poziom rozszerzony**

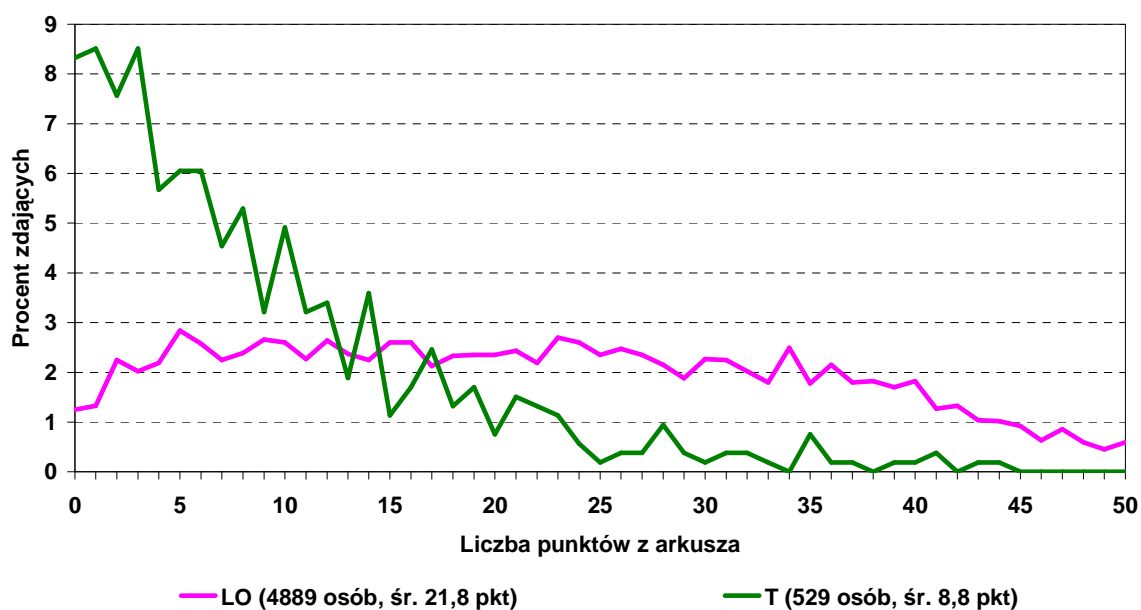


Diagram 15. Poziom rozszerzony – rozkład wyników punktowych w liceach i technikum

Powyższy diagram uwzględnia tylko wyniki zdających z liceów ogólnokształcących i techników czteroletnich (egzamin na poziomie rozszerzonym zdawało 45 maturzystów

z liceów profilowanych oraz po jednej osobie z liceum uzupełniającego i technikum uzupełniającego). Ze względu na średnią liczbę uzyskanych punktów ten arkusz był trudny dla maturzystów z liceów ogólnokształcących (średni wynik to 43,6%) i bardzo trudny dla maturzystów z techników czteroletnich (średni wynik to 17,6%). Ponieważ najlepszy wynik maturzysty z technikum to 88%, więc wszystkie wyniki maksymalne (29 osób) należą do zdających z liceów ogólnokształcących.

Diagram 16. (zob. poniżej) ilustruje wskaźniki łatwości wszystkich 12 zadań z arkusza. Pokazuje on mianowicie, że w tym arkuszu nie było zadań łatwych i bardzo łatwych. Były za to:

- 2 zadania bardzo trudne – nr 9 i nr 10.
- 6 zadań trudnych – nr 1, nr 3, nr 4, nr 5, nr 7 i nr 12,
- 4 zadania umiarkowanie trudne – nr 2, nr 6, nr 8 i nr 11.

Co ciekawe, maturzyści z naszego okręgu najlepiej poradzili sobie z zadaniem 2. – wymagającym przeprowadzenia dowodu pewnej równości algebraicznej. Najtrudniejsze dla nich okazało się zadanie 10., również wymagające przeprowadzenia dowodu, ale za to dowodu geometrycznego, wykorzystującego twierdzenie o odcinku łączącym środki boków trójkąta.

Wskaźniki łatwości zadań otwartych  
matematyka, maj 2011, poziom rozszerzony (N=5465)

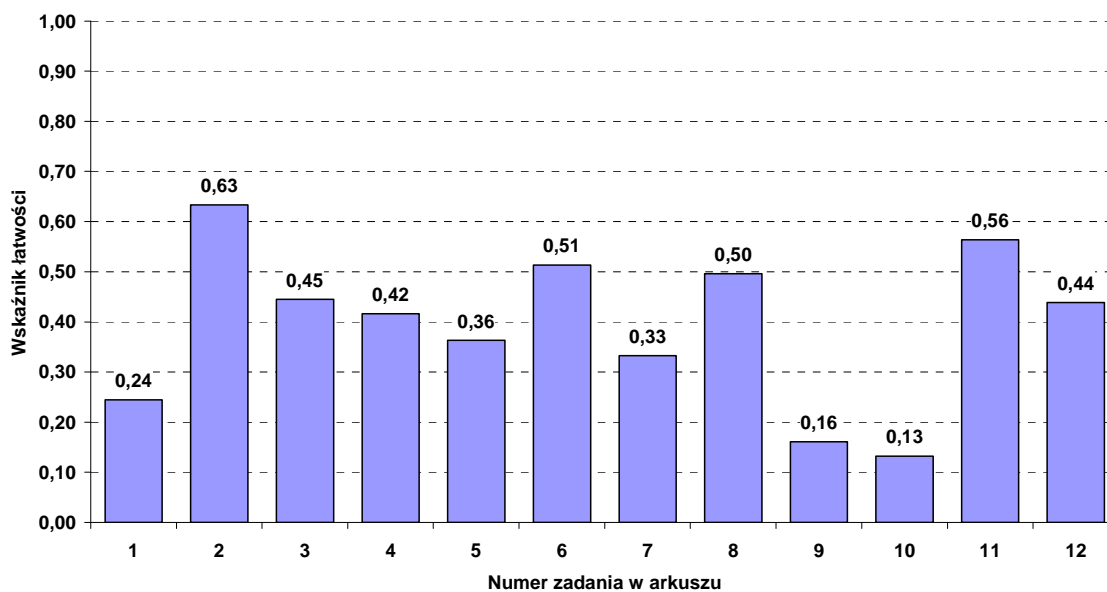


Diagram 16. Poziom rozszerzony – wskaźniki łatwości zadań

Niewielkie frakcje opuszczeń poszczególnych zadań (zob. Tabela 8.) pokazują, że zdający dość świadomie wybierali ten poziom egzaminu – najtrudniejsze zadanie 10. opuściło zaledwie 6,2% maturzystów. Zatem niską skuteczność rozwiązań zadań trzeba pewnie wytłumaczyć niejednakowym poziomem opanowania przez zdających wszystkich niezbędnych umiejętności z 10 działów podstawy programowej matematyki. Dodać należy do tego dużą niesprawność rachunkową zdających zaobserwowaną w trakcie sprawdzania i oceniania prac egzaminacyjnych (sięgającą nawet działań na ułamkach zwykłych – jak to było w rozwiązaniach zadania 2.).

Tabela 8. Poziom rozszerzony – frakcje opuszczeń zadań

Numer zadania w arkuszu	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Frakcja opuszczeń	3,1%	1,5%	3,2%	3,2%	4,0%	0,4%	2,6%	5,3%	3,8%	6,2%	1,7%	4,5%

Poniższy diagram (zob. Diagram 17.) zawiera rozkłady punktów uzyskiwanych przez zdających we wszystkich zadaniach otwartych. Kolorem czerwonym wyróżniono procent zer przyznanych przez egzaminatorów w każdym zadaniu. Zauważmy, że, na przykład, w umiarkowanie trudnym zadaniu 6., z jednej strony odnotowaliśmy (zob. Tabela 8.) tylko 0,4% opuszczeń, z drugiej zaś strony, w tym zadaniu co czwarty maturzysta otrzymał 0 punktów.

Procentowy rozkład punktów uzyskiwanych w zadaniach otwartych,  
matematyka, poziom rozszerzony, maj 2011, (N = 5466)

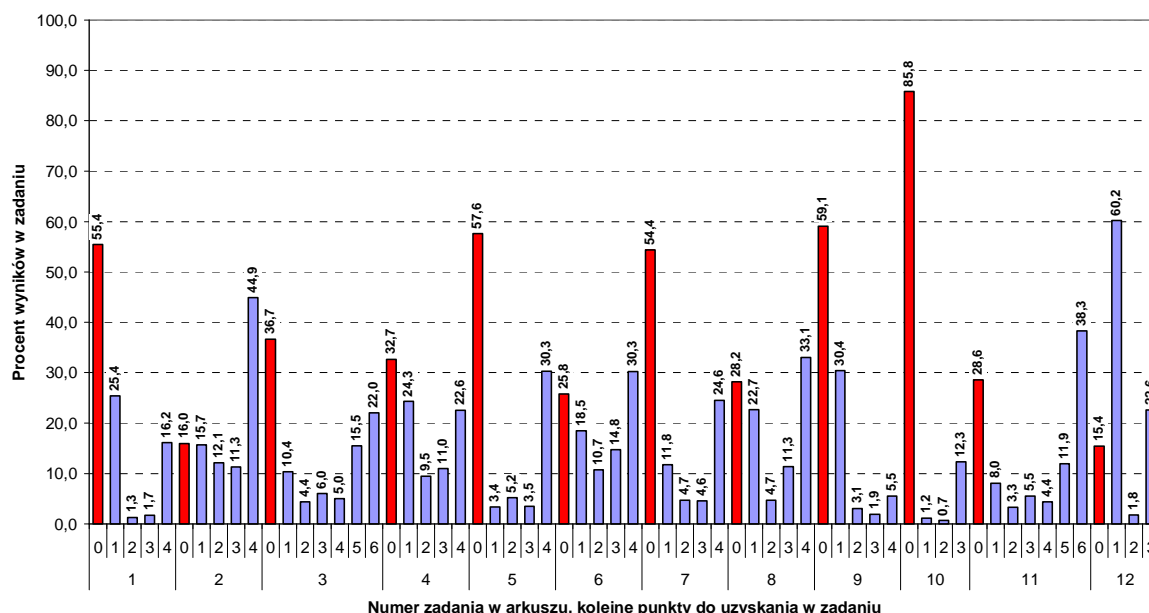


Diagram 17. Poziom rozszerzony – rozkład punktów uzyskiwanych w poszczególnych zadaniach

Największe wrażenie robią wyniki zadania 10. – aż 85,8% zer i tylko 12,3% zdających, którzy bezbłędnie udowodnili pewną własność czworokąta wypukłego, wymagającą rozpoznania i dwukrotnego zastosowania twierdzenia o odcinku łączącym środki boków trójkąta. W tym przypadku schemat nawet sprzyjał zdającym – wystarczyło, że zapisali oni równoległość odpowiednich odcinków (bez powołania się na to twierdzenie).

Na podstawie obserwacji rozwiązań zdających spróbujemy zapisać listę kłopotów maturalistów, przy czym nie będziemy już pisać o błędach rachunkowych, które pojawiały się w każdym zadaniu, na każdym etapie jego rozwiązania:

zadanie 1.: zapisywanie postaci iloczynowej wielomianu, dobór poprawnych argumentów potwierdzających podzielność liczby przez 36,

- zadanie 2.: działania na ułamkach zwykłych, problemy z przekształceniami równoważnymi danej równości,
- zadanie 3.: rozwiązywanie nierówności stopnia trzeciego, zapisywanie wyróżnika trójmianu kwadratowego z parametrem,
- zadanie 4.: zapisywanie równania trygonometrycznego w postaci iloczynowej, wykonywanie równoważnych przekształceń danego równania rozwiązywanie elementarnych równań trygonometrycznych w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$ ,
- zadanie 5.: interpretacja treści zadania, obliczanie pierwszego wyrazu ciągu arytmetycznego z sumy pewnej liczby wyrazów tego ciągu,
- zadanie 6.: utożsamianie środkowej trójkąta z dwusieczną kąta albo wysokością trójkąta, stosowanie twierdzenia cosinusów,
- zadanie 7.: strategie wyznaczania równania prostej stycznej do okręgu o danym równaniu,
- zadanie 8.: interpretacja bryły podanej w treści zadania, określenie pola powierzchni bocznej bryły,
- zadanie 9.: rozróżnianie zastosowań podstawowych wzorów kombinatorycznych,
- zadanie 10.: zastosowania twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa lub twierdzenia o odcinku łączącym środki boków trójkąta,
- zadanie 11.: określenie kąta nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy, rozumienie stosunku dwóch wielkości,
- zadanie 12.: rozumienie położenia zbiorów i ich dopełnień w przestrzeni probabilistycznej, wykorzystanie własności prawdopodobieństwa do dowodów nierówności.

Wyniki egzaminu z matematyki na poziomie podstawowym według wybieranych poziomów, maj 2011

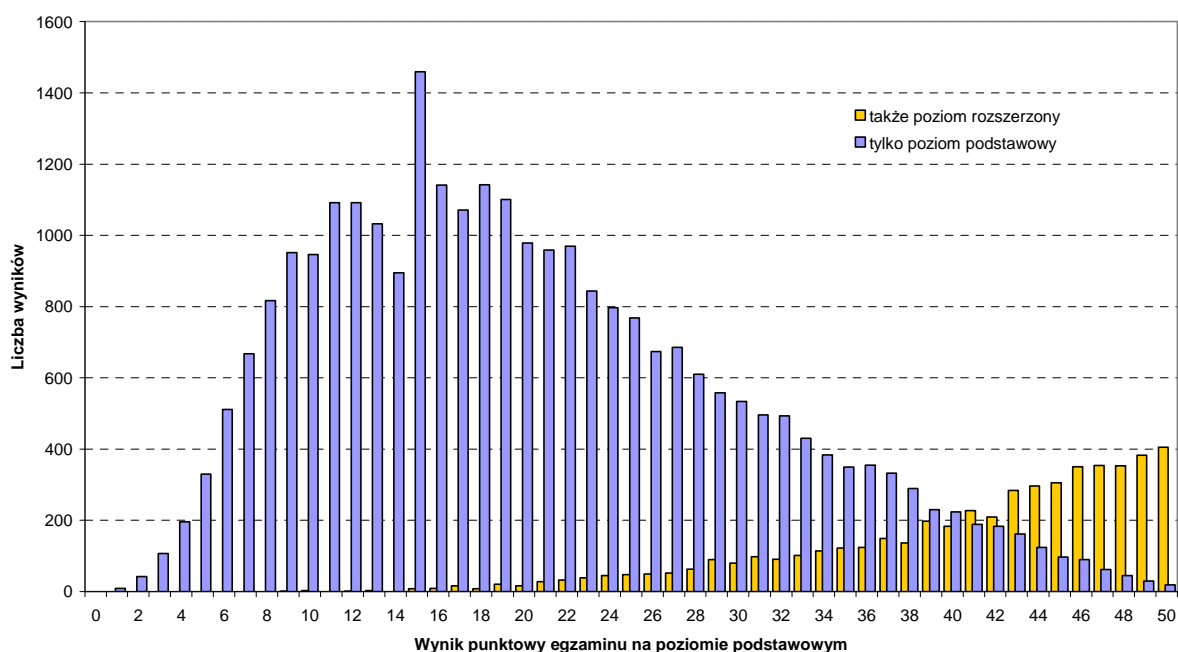


Diagram 18. Wyniki zdających egzaminu z matematyki na obu poziomach

Na zakończenie tej części raportu przedstawiamy (zob. Diagram 18.) wyniki zdających, którzy wybrali poziom rozszerzony egzaminu na tle wyników wszystkich zdających egzamin obowiązkowy. Wybór poziomu rozszerzonego był dla zdecydowanej większości zdających

racjonalny i dobry. Było tylko sześciu zdających, którzy wybrali maturę na poziomie rozszerzonym i nie zdali matury obowiązkowej.

### 3. Matura próbna a matura majowa – wyniki niektórych zadań egzaminacyjnych u tych samych zdających

W tej części przedstawiamy niektóre informacje dotyczące wyników zdających na próbnej maturze w dniu 3 listopada 2010 roku i zestawiamy je z wynikami tych samych zdających z egzaminu w dniu 5 maja 2011 roku. I choć jest dla nas niemal oczywiste, że wyniki majowego egzaminu są u większości zdających lepsze niż wyniki egzaminu próbnego, to chcieliśmy wykorzystać znakomitą okazję do zebrania danych o wielkości przyrostów wiedzy i umiejętności maturzystów. Wskazujemy mianowicie w obu arkuszach 4 zadania, które sprawdzały te same umiejętności: rozwiązanie nierówności kwadratowej, rozwiązanie zadania tekstowego, dowód algebraiczny i dowód geometryczny. Ponieważ wynik każdego zdającego jest łatwy do zidentyfikowania w bazie OKE ze względu na przypisany do arkusza numer PESEL, więc możemy w ten sposób obserwować zmiany w punktacji uzyskiwanej przez tego zdającego podczas obu wspomnianych egzaminów. Omówimy zatem kolejno wyniki zdających w tych zadaniach.

Nierówność kwadratowa – standard II (REP).

Przypomnijmy najpierw treści zadań:

Matura próbna, listopad 2010	Matura majowa, 2011
Zadanie 26. (2 pkt) Rozwiąż nierówność $x^2 + 11x + 30 \leq 0$ .	Zadanie 24. (2 pkt) Rozwiąż nierówność $3x^2 - 10x + 3 \leq 0$ .

Wyniki tych samych zdających z listopada 2010 i z maja 2011 zostały zestawione w poniższej tabeli.

		Matura maj 2011 – Zadanie 24.			
		0	1	2	Razem
Matura próbna, listopad 2010 Zadanie 26.	0	10,0%	10,4%	8,8%	29,1%
	1	3,6%	13,4%	18,8%	35,8%
	2	0,8%	5,5%	28,7%	35,1%
	Razem	14,4%	29,3%	56,3%	100%

W listopadzie oraz w maju nawet typ nierówności był identyczny. Ponadto, nie zmienił się schemat oceniania rozwiązań zdających. Pierwszy punkt (pokonanie zasadniczych trudności zadania) egzaminator przyznawał zdającemu wtedy, gdy ten poprawnie obliczył pierwiastki trójmianu kwadratowego. Drugi punkt (rozwiązanie pełne) zaś wtedy, gdy zdający zapisał poprawnie zbiór rozwiązań nierówności. Egzaminator mógł przyznać także jeden punkt zdającym, którzy popełnili błąd rachunkowy w trakcie obliczania (dwóch) pierwiastków trójmianu i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisał zbiór rozwiązań nierówności.

Dane na przekątnej głównej tej tabeli (zaznaczone żółtym kolorem) pokazują procentową liczebność grup zdających, którzy na próbie i na właściwym egzaminie osiągnęli jednokowe wyniki punktowe. Jak widać:

- 10% maturzystów w naszym okręgu nie otrzymało nawet jednego punktu na obu egzaminach (nie podjęło próby jego rozwiązania albo nie pokonało zasadniczych trudności w tym zadaniu),
- 13,4% maturzystów otrzymało w listopadzie i maju 1 punkt,
- 28,7% maturzystów rozwiązało bezbłędnie to zadanie w listopadzie i w maju.

Obserwacja wyników położonych nad główną przekątną tej tabeli pokazuje, że czas pomiędzy próbną maturą a maturą właściwą został dobrze wykorzystany – było 19,2% (łącznie) zdających, którzy w listopadzie nie zdobyli jednego punktu teraz zdobyło 1 lub 2 punkty. Podobnie jest w przypadku 18,8% zdających – w listopadzie uzyskali 1 punkt, a w maju bezbłędnie rozwiązało tę nierówność. Łącznie więc 38% zdających „zyskało” punkty na właściwym egzaminie.

Z kolei dane pod główną przekątną informują nas o wielkości grup zdających, którzy w maju wypadli gorzej niż w listopadzie. I tak:

- 3,6% maturzystów uzyskało w listopadzie 1 punkt, zaś w maju 0 punktów,
- 0,8% maturzystów uzyskało w listopadzie 2 punkty, zaś w maju 0 punktów,
- 5,5% maturzystów uzyskało w listopadzie 2 punkty, zaś w maju 1 punkt.

W przypadku zdających z pierwszej i trzeciej grupy takie wyniki można zinterpretować prawdopodobnie jako zwykle potknięcia (i to zapewne rachunkowe) na egzaminie. Czy 0,8% maturzystów z drugiej grupy to egzaminacyjny stres, czy może jednak nieugruntowana wiedza, a może po prostu wiedza na poziomie znajomości algorytmów?

Zadanie tekstowe – standard III (MOD)

Zacznijmy od przypomnienia treści obu zadań:

Matura próbna, listopad 2010	Matura majowa, 2011
<p>Zadanie 34. (5 pkt)</p> <p>Droga z miasta A do miasta B ma długość 474 km. Samochód jadący z miasta A do miasta B wyrusza godzinę później niż samochód z miasta B do miasta A. Samochody te spotykają się w odległości 300 km od miasta B. Średnia prędkość samochodu, który wyjechał z miasta A, liczona od chwili wyjazdu z A do momentu spotkania, była o 17 km/h mniejsza od średnie prędkości drugiego samochodu liczonej od chwili wyjazdu z B do chwili spotkania. Oblicz średnią prędkość każdego samochodu do chwili spotkania.</p>	<p>Zadanie 32. (5 pkt)</p> <p>Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrówkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 km mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.</p>

Zadanie z próbnej matury nie tylko na pierwszy rzut oka wygląda groźnie. Po rozwiązaniu obu zadań widać, że maturzyści w listopadzie zetknęli się, być może pierwszy raz z sytuacją, w której żadnego rozwiązania nie wolno było odrzucić! Zadanie z listopada dostarczyło

także argumentu w dyskusji o rozwiązaniach odgadywanych – podanie przez zdającego jednego rozwiązania należy traktować najwyżej jako niewielki postęp w rozwiązaniu. Dopóki zdający nie uzasadni (a model w postaci układu równań czy równania z jedną niewiadomą znakomicie ułatwia argumentację), że nie ma innych rozwiązań, nie może otrzymać nawet połowy punktów. Przyjrzyjmy się teraz wynikom zdających w obu zadaniach – są podane w poniższej tabeli.

		Matura maj 2011 – Zadanie 32.							
		pkt	0	1	2	3	4	5	Razem
Matura próbna, listopad 2010 Zadanie 34.	0	41,2%	10,8%	6,4%	5,8%	2,5%	15,9%	82,6%	
	1	0,3%	0,3%	0,2%	0,2%	0,1%	0,9%	2,0%	
	2	0,3%	0,2%	0,2%	0,3%	0,2%	1,3%	2,4%	
	3	0,2%	0,3%	0,2%	0,4%	0,3%	2,8%	4,2%	
	4	0,1%	0,0%	0,1%	0,1%	0,2%	3,3%	3,9%	
	5	0,1%	0,0%	0,0%	0,1%	0,1%	4,6%	4,9%	
	Razem	42,1%	11,6%	7,2%	6,8%	3,4%	28,8%	100%	

Refleksje po oglądzie głównej przekątnej tabeli nie są optymistyczne – aż 41,2% zdających w maju ponownie otrzymało 0 punktów, co oznacza, że nie potrafiło ułożyć poprawnie nawet jednego równania. Na drugim biegunie znajduje się tylko 4,6% zdających, którzy zarówno w listopadzie jak i w maju bezbłędnie rozwiązali oba zadania. Zauważamy jednak, że „zyski” punktowe są największe u zdających, którzy otrzymali 0 punktów w listopadzie (zob. trzeci wiersz tabeli). Było ich co prawda aż 82,6%, ale z drugiej strony, połowa z nich (41,4%) w maju radzi sobie zdecydowanie lepiej. W szczególności, aż 15,9% zdających potrafiło bezbłędnie rozwiązać zadanie z majowego egzaminu. Ciekawe jest to, iż na łączną liczbę 36 komórek w tej tabeli, aż w 27 komórkach obserwujemy naprawdę niewielkie zmiany (mniejsze niż 0,5%). W szczególności bardzo małe zmiany obserwujemy w obszarze pod główną przekątną. Mamy tutaj do czynienia faktycznie ze „stratami” punktowymi zdających w maju w stosunku do listopadowej próbnej matury. Czy tylko stresem egzaminacyjnym można wytłumaczyć na przykład fakt, że 0,1% maturzystów, którzy w listopadzie rozwiązało bezbłędnie zadanie 34. na majowej maturze zupełnie nie poradziło sobie nawet z jednym równaniem? Łatwiej bowiem wytłumaczyć w przypadku tych zdających stratę 1 punktu (0,1%), czy nawet 2 punktów (też 0,1%). Jedno nie ulega wątpliwości – niemal połowa maturzystów oczekuje doskonalenia umiejętności modelowania matematycznego. Tym bardziej, że wymagania egzaminacyjne nie uległy i nie ulegną zmianie aż do matury w roku 2014.

#### Dowód algebraiczny standard V (ROZ)

Matura próbna, listopad 2010	Matura majowa, 2011
Zadanie 30. (2 pkt) Uzasadnij, że jeśli $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2$ , to $ad = bc$ .	Zadanie 25. (2 pkt) Uzasadnij, że jeżeli $a + b = 1$ i $a^2 + b^2 = 7$ , to $a^4 + b^4 = 31$ .

Uzasadnienia, które zdający przeprowadzali w obu zadaniach oczywiście się różnią, jednak z racji tego, że są to dowody algebraiczne pozwalamy sobie zestawić w jednej tabeli wyniki zdających.



		Matura majowa, maj 2011 – Zadanie 25.			
	pkt	0	1	2	Razem
Matura próbna, listopad 2010 – Zadanie 30.	0	81,7%	6,7%	4,3%	92,7%
	1	0,3%	0,1%	0,3%	0,7%
	2	1,3%	0,9%	4,4%	6,7%
	Razem	83,3%	7,8%	8,9%	100%

Tabela powyżej ujawnia niską skuteczność zdających – 81,7% zdających uzyskało 0 punktów na obu egzaminach, zaś tylko 4,4% zdających otrzymało maksymalną liczbę punktów. Warto jednak zwrócić uwagę na frakcję osób, które w listopadzie otrzymały 0 punktów (92,7% wszystkich zdających). W maju 2011 roku 81,7% zdających powtórzyło wynik z próbnej matury (0 punktów), natomiast 11% maturzystów poprawiło swój rezultat – 6,7% uzyskało 1 punkt, zaś 4,3% rozwiązało zadanie bezbłędnie. Nie powinno się tłumaczyć tych przyrostów tylko większą motywacją zdających na właściwym egzaminie. Stopień komplikacji rozwiązań obu zadań jest przecież trochę inny – dowód z listopada 2010 wymaga kreatywności w jednym momencie rozwiązania – zdający, po rozpisaniu lewej i prawej strony założenia oraz redukcji wyrazów podobnych „powinien zobaczyć” kwadrat różnicy dwóch wyrażeń, który równa się zero i wyciągnąć z tego poprawny wniosek. Dowód z maja 2011 wymaga od zdającego zauważenia, że  $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$  oraz umiejętności obliczenia iloczynu  $a \cdot b$ . Zwróćmy uwagę, że było 1,3% zdających, którzy w listopadzie otrzymali 2 punkty a w maju niestety żadnego. Cieszy mocno fakt, że w maju, w warunkach większego stresu, zdający lepiej potrafili zebrać argumenty w swoich dowodach. Cieszy tym bardziej to, że przyrosty punktowe w zadaniach na dowodzenie są w ogóle możliwe. Obecność takich zadań w każdym arkuszu z poziomu podstawowego z pewnością nie pozostawia uczniów i ich nauczycieli obojętnymi na kształcenie i doskonalenie najtrudniejszej matematycznej umiejętności.

#### Dowód geometryczny – standard V (ROZ)

Matura próbna, listopad 2010	Matura majowa, 2011
Zadanie 29. (2 pkt) Dany jest prostokąt $ABCD$ . Okręgi o średnicach $AB$ i $AD$ przecinają się w punktach $A$ i $P$ . Wykaż, że punkty $B$ , $P$ i $D$ leżą na jednej prostej.	Zadanie 29. (2 pkt) Dany jest czworokąt $ABCD$ , w którym $AB \parallel CD$ . Na boku $BC$ wybrano taki punkt $E$ , że $ EC  =  CD $ i $ EB  =  BA $ . Wykaż, że kąt $AED$ jest prosty.

Mamy tutaj do czynienia z podobną sytuacją jak w przypadku dowodów algebraicznych (zob. tabela poniżej). Dowody geometryczne są dla maturzystów bardzo trudne – 87,4% zdających w listopadzie i maju uzyskało 0 punktów, zaś tylko 1,8% zdających potrafiło oba dowody przeprowadzić bezbłędnie. Ponadto, 2,5% zdających, którzy w listopadzie uzyskali 1 punkt, w maju niestety już tego punktu nie zdobyli, a 1% maturzystów, którzy przeprowadzili poprawny dowód w listopadzie, w maju otrzymali 0 punktów. Wydaje się, że wpływ na te wyniki miała obecność rysunku w arkuszu listopadowym i brak tego rysunku w arkuszu majowym. Nie sposób jednak nie zauważyć, że, łącznie, 6,8% zdających poprawiło swój wynik punktowy:

1,9% zdających w listopadzie otrzymało 0 punktów – w maju 1 punkt,

3,8% zdających w listopadzie otrzymało 0 punktów – w maju 2 punkty,  
1,1% zdających w listopadzie otrzymało 1 punkt – w maju 2 punkty.

		Matura majowa, maj 2011 – Zadanie 29.				
		pkt	0	1	2	Razem
Matura próbna, listopad 2010 – Zadanie 29.	0	87,4%	1,9%	3,8%	93,0%	
	1	2,5%	0,3%	1,1%	3,9%	
	2	1,0%	0,2%	1,8%	3,1%	
	Razem	90,9%	2,4%	6,7%	100%	

Te zdobycze punktowe na właściwym egzaminie w odniesieniu do dowodu geometrycznego cieszą szczególnie mocno. Analizując wyniki matur, analizując korelacje wyników próbnych matur i matur właściwych mamy prawo wnosić, że większość zdających „zgubi” 2 punkty (a nawet 4 punkty) w zadaniach na dowodzenie. Obraz umiejętności matematycznych polskich maturzystów nie byłby pełny, gdyby nie wprowadzenie do arkuszy egzaminacyjnych zadań, które pozwalają sprawdzić, czy zdający cyt.: „posiada umiejętności w zakresie rozumowania i argumentacji”.

Jakie wnioski wypływają z obserwacji wyników zdających w czterech zadaniach, które rozwiązywali podczas próbnej i właściwej matury?

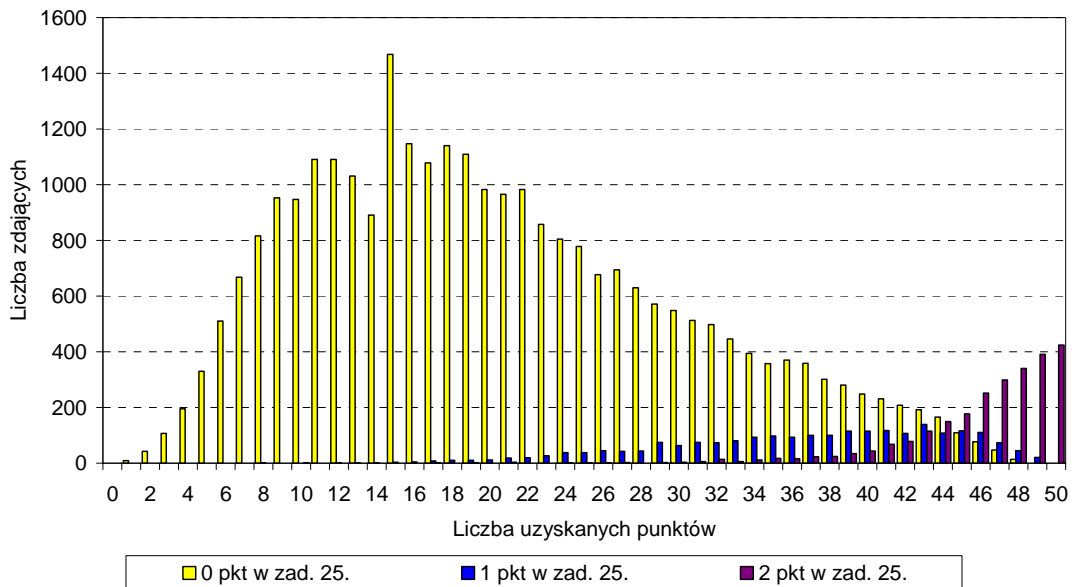
Po pierwsze, jest niewielka frakcja zdających obowiązkowy egzamin z matematyki, którzy w omawianych czterech zadaniach uzyskiwali maksymalne wyniki. Interesująca będzie obserwacja przyrostów (miejmy nadzieję) liczebności w takich grupach zdających, przynajmniej do roku 2014 – przy niezmiennych wymaganiach egzaminacyjnych. Oczywiście jest niemal, że w takich grupach zdających ten proces będzie przebiegać najwolniej. Ponieważ wyniki zdających w naszym okręgu od kilku lat nie są dla wielu z nas satysfakcjonujące, więc spodziewamy się większych przyrostów liczebności w grupach zdających, którzy za rozwiązanie zadań z arkusza uzyskują tylko częściową punktację.

Po drugie, największy „zysk” zdający mogą osiągnąć w zadaniach, w których sprawdza się umiejętność użycia prostych, dobrze znanych obiektów (nierówność kwadratowa). Nieco mniejsze zdobycze punktowe dotyczą zadań wymagających dobrania modelu matematycznego do danej sytuacji (zadanie tekstowe).

Po trzecie „zyski” punktowe są możliwe do osiągnięcia przez zdających nawet w najtrudniejszych zadaniach egzaminacyjnych – dowodach algebraicznych i dowodach geometrycznych. To bardzo cieszy, nie tylko ze względu na obecność takich zadań w arkuszach egzaminacyjnych z matematyki. Również nie ze względu na istnienie odpowiedniego i wyraźnego zapisu w standardach wymagań egzaminacyjnych z matematyki. Naprawdę bowiem trudno sobie wyobrazić lekcje matematyki, szczególnie w szkole ponadgimnazjalnej, na których nie zadaje się pytań w rodzaju: dlaczego tak jest? czy potrafisz zapisać uzasadnienie dla swojej obserwacji?

W obrębie samej już tylko matematyki widać wyraźnie zależność między skutecznością zdających w rozwiązywaniu zadań na dowodzenie, a ich wynikiem ogólnym z egzaminu. Popatrzmy na kolejne dwa diagramy.

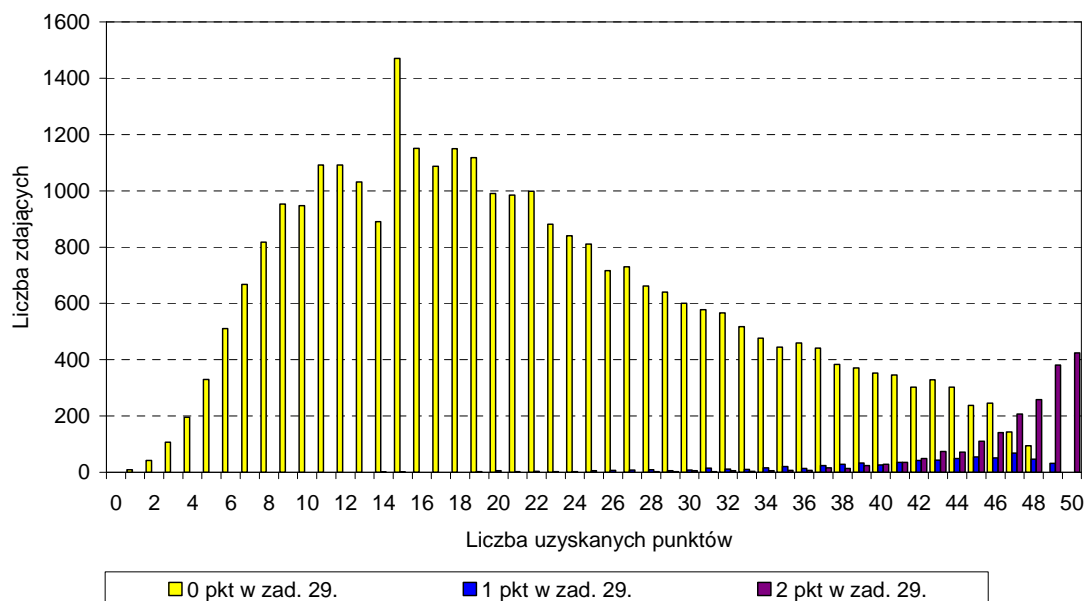
**Rozkład punktów uzyskanych na egzaminie według liczby punktów za zadanie 25.,  
matematyka, poziom podstawowy, maj 2011**



Spośród 2500 zdających, którzy uzyskali oba punkty za bezbłędne rozwiązanie zadania 25. (dowód algebraiczny) tylko jeden nie zdał matury, zaś wśród 2231 zdających, którzy otrzymali 1 punkt za ten dowód były 4 osoby, które nie pokonały progu zdania egzaminu.

Jeszcze silniejsza zależność występuje w przypadku wyników za zadanie 29. – dowód geometryczny (zob. diagram poniżej). Spośród 1871 zdających, którzy bezbłędnie rozwiązali to zadanie najslabszy wynik egzaminu miało dwóch zdających (28 punktów z 50 możliwych). Z kolei wśród 677 zdających, którzy uzyskali 1 punkt w tym zadaniu był tylko jeden, który nie zdał egzaminu.

**Rozkład punktów uzyskanych na egzaminie według liczby punktów za zadanie 29.,  
matematyka, poziom podstawowy, maj 2011**



Dobrze rokują na przyszłość przyrosty punktowe uzyskane przez zdających w zadaniach na dowodzenie. Te przyrosty miały przecież miejsce na egzaminie majowym, zaledwie 6 miesięcy po próbnej maturze. Może zatem trzeba, aby zadania tego typu pojawiały się na każdej lekcji matematyki.